

# Proposition de stage de L3

## Jeux infinis, escalade

Pierre Lescanne  
ENS de Lyon, LIP,  
46 allée d'Italie, 69364 Lyon, France

Pierre.lescanne@ens-lyon.fr, tel : 06 72 32 53 81

### Le cadre du stage

#### L'escalade un phénomène bien réel

L'*escalade* est un phénomène bien connu des organisateurs d'enchères, il consiste pour deux agents à enchérir toujours plus alors que la valeur enchérie dépasse de plus en plus la valeur réelle de l'objet. Il semble alors que leur but ultime est de perdre le moins possible sur ce qui a été déjà engagé. Pourtant, ces agents ne sont pas fous, au contraire ils sont tous-à-fait rationnels. Nous allons cependant préciser plus loin ce que nous entendons par rationalité d'un agent, dans un sens nouveau qui constitue toute l'originalité du présent projet.

Omniprésent, le phénomène d'escalade apparaît dans divers contextes.

**Dans les relations internationales :** aujourd'hui nous le vivons dans les rapports que la Corée du Nord, d'une part et l'Iran, d'autre part, entretiennent avec les pays du monde occidental, il a aussi caractérisé la guerre froide et l'attitude de l'Allemagne et du Japon durant la seconde guerre mondiale,

**Dans les activités financières :** les chaînes de Ponzi sont évidemment des escalades, avec plus récemment le cas de l'homme d'affaire Bernard Madoff. La crise des subprimes est aussi un archétype d'escalade, comme l'est le comportement de Jérôme Kerviel.

**Dans les projets industriels :** le projet du Concorde dans les années 1960 fut aussi une escalade : plus les Britanniques et les Français étaient engagés dans le projet, moins ils pouvaient l'arrêter.

**Dans les enchères :** le cas le plus typique, sur lequel nous nous focaliserons, est celui des enchères dite à l'américaine<sup>1</sup> où, à chaque tour, les enchérisseurs paient une somme modique (disons 1 €) qui reste au commissaire priseur quoi qu'il arrive et où le dernier enchérisseur remporte l'objet.

Martin Shubik avait affirmé dans un article de 1971 [Shubik, 1971] que l'escalade n'était pas rationnelle et depuis tous ses successeurs, O'Neill [1986], Leininger [1989], Gintis [2000] entre autres, ont repris telle quelle cette affirmation, alors que l'escalade est bien présente dans la vie réelle impliquant des acteurs intelligents : des expériences de laboratoire, menées par diverses équipes et rapportées en particulier par Colman dans son livre [Colman, 1999], ont montré qu'elle faisait partie du comportement naturel des acteurs des expériences. Dans la littérature, les auteurs parlent de paradoxe, Gintis [2000] la qualifie d'« illogique » et Colman [1999] parle d'« effet Macbeth », évoquant ce roi d'Écosse de la pièce éponyme de Shakespeare,

---

<sup>1</sup>Shubik appelle cela la *dollar auction* : l'enchère du dollar.

qui va de crime en crime, d'autres évoquent la « Reine rouge » de Lewis Carroll (voir [Wikipédia, 2011]).

Nous nous situons dans la suite comme logiciens et nous nous placerons dans le cadre de la *théorie des jeux économiques*, car c'est là que le concept d'escalade a été étudié par les spécialistes du sujet. Qui dit escalade, dit jeu infini. Il faut donc utiliser des outils de raisonnement logique conçus pour raisonner sur les structures infinies, en l'occurrence les jeux infinis. Or tous les auteurs qui nous ont précédé ont extrapolé aux jeux infinis des résultats obtenus sur des jeux finis et c'est là que le bât blesse, car ce raisonnement est totalement erroné. L'historien des sciences pourra remarquer que ce type d'erreur est très ancien, aussi ancien que la science. Dès le cinquième siècle avant Jésus-Christ, Zénon d'Élée nie le mouvement et démontre par un raisonnement par induction mathématique (donc qui s'applique à des objets finis) qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue ; or la droite du temps est un objet infini sur lequel l'induction mathématique ne s'applique pas. Cette erreur est aussi celle qu'évite Weierstrass au dix-neuvième siècle [Weierstrass, 1872] quand il montre que la somme infinie de fonctions partout différentiables peut ne pas être différentiable.

## L'escalade et les jeux séquentiels

Un jeu séquentiel, aussi appelé *jeu en forme extensive*, est un jeu non coopératif où les joueurs jouent à tour de rôle, un tel jeu est un arbre doublement étiqueté, dans lequel les nœuds représentent les étapes du jeu. Chaque nœud est donc étiqueté par le nom d'un des joueurs et chaque arc visualise le choix d'un joueur et est étiqueté par ce choix. Les feuilles de l'arbre représentent la fin du jeu et contiennent les gains attribués à chacun des joueurs. La théorie étant déjà assez compliquée <sup>2</sup>, nous nous sommes restreints aux cas de deux choix, donc aux arbres binaires, cela ne constituant aucunement une perte de généralité. Une partie se déroule ainsi : suivant la stratégie qu'il adopte, à chaque étape, un joueur fait un choix et la partie continue sur le nœud relié par l'arc portant l'étiquette correspondant à ce choix. La réunion des stratégies des joueurs s'appelle un *profil de stratégie*. Si la partie s'arrête les joueurs reçoivent les gains portés par le nœud (la feuille) où la partie s'arrête. Bien sûr, les joueurs adoptent des stratégies et jouent de façon à maximiser leurs choix. Comme les joueurs jouent de façon antagoniste et sans se concerter (sans coopérer), ils n'aboutissent pas à un optimal global pour tous les joueurs, mais à une position où chaque joueur n'a aucun intérêt à changer de stratégie au risque de gagner moins. En d'autres termes les joueurs, qui se « tiennent par la barbichette » trouvent un point d'équilibre, qui est un profil de stratégie que l'on appelle un *équilibre de Nash*.

La théorie des jeux séquentiels a été initiée par Kuhn [1953] et portait sur les jeux finis. Vestergaard [2006] avec lequel nous avons collaboré, a proposé une approche inductive des jeux finis largement inspirée par la théorie de la démonstration et par COQ. Il y a bien eu des tentatives non inductives de définir les jeux séquentiels infinies antérieures à la nôtre, mais elles n'ont aucun intérêt du point de la preuve, étant assez informelles et probablement incohérentes. La véritable approche de l'infini est celle de la *coinduction*, qui va être définie dans le paragraphe suivant.

## La coinduction un outil pour raisonner sur les structures infinies

L'induction (mathématique), aussi appelée récurrence, est un moyen de raisonner sur les structures finies. Rappelons qu'elle consiste à établir une hypothèse d'induction, à prouver qu'elle est satisfaite pour les structures de base et qu'elle

---

<sup>2</sup>Comme nous le mentionnons dans la section

est préservée par les constructeurs de la structure. En théorie des jeux, pour des raisons historiques, elle est appelée, *induction rétrograde*, en anglais *backward induction*. Elle permet, entre autres, de caractériser des profils de stratégies qui sont des équilibres de Nash. Pour parler correctement de l’escalade, nous voulons raisonner sur les jeux infinis, par conséquent la **rupture** que nous proposons consiste à utiliser des outils des raisonnements coinductifs qui sont de même type que l’induction, à savoir

- établissement d’une hypothèse,
- préservation de cette hypothèse.

adaptés aux structures infinies<sup>3</sup>. De tels outils de raisonnement existent et s’appellent *coinduction*. Sans entrer dans des détails techniques, disons que la coinduction est un principe de raisonnement<sup>4</sup> qui permet de démontrer l’invariance d’une propriété (d’un prédicat). Ainsi par coinduction, on peut démontrer qu’un profil de stratégie donné est un équilibre de Nash<sup>5</sup>.

Les raisonnements par coinduction sont subtils et les résultats sur les structures infinies sont souvent contre-intuitifs. Pour répondre à ce défi au bon sens, nous avons codé, puis vérifié tous nos résultats à l’aide de l’assistant de preuve COQ [Bertot and Castéran, 2004]. Nous avons ainsi montré rigoureusement que contrairement à ce que dit Shubik l’escalade est rationnelle [Lescanne and Perrinel, 2010].

## L’objectif du stage

Le stage comportera l’écriture de preuves en COQ et portera sur l’extension des résultats obtenus jusqu’à présent.

1. La relation essentielle entre les profils de stratégie (celle qui permet de définir les équilibres de Nash) est définie inductivement. Il serait intéressant d’étudier une convertibilité coinductive et d’en tirer les conséquences au point de vue des équilibres et de la rationalité.
2. Le théorème d’Aumann relie les équilibres obtenus par induction rétrograde avec la connaissance commune des agents qu’ils n’ont aucun intérêt à faire autrement. La connaissance commune est concept<sup>6</sup> obtenu par induction, or Capretta [2007] a défini un concept coinductif de connaissance commune. Y a-t-il un théorème d’Aumann coinductif? Le stagiaire tentera de répondre à cette question (il consultera par exemple Vestergaard et al. [2006]).

## Références

- Y. Bertot and P. Castéran. *Interactive Theorem Proving and Program Development Coq’Art : The Calculus of Inductive Constructions*. Springer-Verlag, 2004.
- V. Capretta. Common knowledge as a coinductive modality. In Erik Barendsen, Herman Geuvers, Venanzio Capretta, and Milad Niqui, editors, *Reflections on Type Theory, Lambda Calculus, and the Mind*, pages 51–61. ICIS, Faculty of Science, Radboud University Nijmegen, 2007. Essays Dedicated to Henk Barendregt on the Occasion of his 60th Birthday.

---

<sup>3</sup>Pour faire court, on peut dire que cette théorie telle que nous la présentons ici a été initiée essentiellement par Coquand [1993]. Pour rendre justice aux autres nombreux contributeurs, on pourra consulter l’article historique très documentée de Sangiorgi [2009].

<sup>4</sup>La coinduction est fondée sur la caractérisation d’un plus grand point fixe.

<sup>5</sup>Plus précisément, nous caractérisons des *équilibres parfaits en sous-jeux* qui sont des extensions aux jeux infinis des équilibres obtenus par induction rétrograde et qui sont par conséquent des équilibres de Nash.

<sup>6</sup>Plus précisément une modalité.

- A. M. Colman. *Game theory and its applications in the social and biological sciences*. London New York : Routledge, 1999. Second edition.
- T. Coquand. Infinite objects in type theory. In Henk Barendregt and Tobias Nipkow, editors, *TYPES*, volume 806 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 62–78. Springer, 1993. ISBN 3-540-58085-9.
- H. Gintis. *Game Theory Evolving : A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction*. Princeton University Press, 2000.
- H. W. Kuhn, editor. *Classics in Game Theory*. Princeton Uni. Press, 1997.
- H. W. Kuhn. Extensive games and the problem of information. *Contributions to the Theory of Games II*, 1953. Reprinted in Kuhn [1997].
- W. Leininger. Escalation and cooperation in conflict situations. *J. of Conflict Resolution*, 33 :231–254, 1989.
- Pierre Lescanne and Matthieu Perrinel. On the rationality of escalation. *CoRR*, abs/1004.5257, 2010.
- B. O’Neill. International escalation and the dollar auction. *J. of Conflict Resolution*, 30(33-50), 1986.
- D. Sangiorgi. On the origins of bisimulation and coinduction. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, 31(4), 2009.
- M. Shubik. The dollar auction game : A paradox in noncooperative behavior and escalation. *Journal of Conflict Resolution*, 15(1) :109–111, 1971.
- R. Vestergaard. A constructive approach to sequential Nash equilibria. *Inf. Process. Lett.*, 97 :46–51, 2006.
- Rene Vestergaard, Pierre Lescanne, and Hiroakira Ono. Pierre lescanne and hiroakira ono. Research Report JAIST/IS-RR-2006-009, Japan InsT. of Science and Technology, 2006.
- K. Weierstrass. *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, chapter “Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18 Juli 1872”, pages 71–74. 1872. *Karl Weierstrass Mathematische Werke, Abhandlungen II*.
- Wikipédia. Théorie de la reine rouge — wikipédia, l’encyclopédie libre, 2011. URL `\url{http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9orie_de_la_reine_rouge&oldid=62845222}`. [En ligne ; Page disponible le 17-mars-2011].