Approximation rationnelle efficace en machine

Nicolas Brisebarre et Guillaume Hanrot
L3 informatique ENS Paris
Proposition de stage 2011

Titre du stage : Approximation rationnelle efficace en machine
Durée : 6 semaines, à partir du 6 juin 2011.
Encadrants : Nicolas Brisebarre (Chargé de recherche au CNRS, LIP, ENS Lyon, EPI Arénaire, encadrant principal) et Guillaume Hanrot (Professeur à l'ENS Lyon, LIP, ENS Lyon, EPI Arénaire).
Lieu du stage : Projet Arénaire, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon, Cedex 07.
Téléphone : +33 (0)4 72 72 84 96
Télécopie : +33 (0)4 72 72 80 80.
Méls : Nicolas.Brisebarre@ens-lyon.fr et Guillaume.Hanrot@ens-lyon.fr

Lorsqu'on implante (en matériel ou en logiciel) des fonctions numériques ou des filtres numériques, on utilise le plus souvent des approximations polynomiales et rationnelles. Dans la plupart des cas, le polynôme ou la fraction rationnelle qui approchent le mieux (pour une norme, un degré et sur un intervalle donnés) une fonction a des coefficients qui ne sont pas exactement représentables en machine. D'un autre côté, les approximations que l'on implante ont nécessairement des coefficients qui se codent sur un nombre fini - qui peut être petit - de bits : cela provient, pour les implantations logicielles, de la représentation en virgule flottante et pour les implantations matérielles, du besoin d'avoir de petits (et donc rapides et/ou peu coûteux) multiplieurs. On souhaite donc être capable de produire de bons (quant à l'erreur) approximants polynomiaux et rationnels qui satisfassent à ce type de contraintes. Notons que lorsque l'approximant est une fraction rationnelle, des contraintes sur les pôles des fractions peuvent s'ajouter.

Les articles [BMT], [BC] et [BH] ont proposé des réponses dans le cas où les polynômes considérés sont à coefficients nombre-machine réels. Une première étape fondamentale dans ces calculs est la détermination du polynôme de degré au plus n ou la fraction de numérateur de degré au plus m et de dénominateur de degré au plus n (où m et n sont des entiers naturels donnés) qui minimise la norme $||f-p||$ où f est la fonction considérée. On se concentre ici sur le cas de la norme sup i.e. $||f-p|| = \sup\{|f(x)-p(x)|; x \in [a,b]\}$. Dans le cas de polynômes et des fractions rationnelles à coefficients réels, la théorie est bien connue [Che, Pow] et des implantations satisfaisantes existent dans le système de calcul symbolique MAPLE, dans Chebfun (un ensemble de routines pour le calcul numérique, développées en MATLAB `http://www2.maths.ox.ac.uk/chebfun/`) et le logiciel Sollya `http://sollya.gforge.inria.fr/`, développé au sein de l'équipe Arénaire, en propose aussi une (dans le cas polynomial seulement),

On s'intéresse dans ce stage à la détermination efficace et fiable de la meilleure approximation rationnelle à coefficients nombre machine. Outre la généralisation des travaux [BMT] et [BC] au cas rationnel, on visera deux applications particulières :

– la E-méthode [Erc75, Erc77], due à M. Ercegovac (Univ. of California at Los Angeles), est un processus efficace pour l'évaluation en virgule fixe de polynômes et de certains types de fractions rationnelles. Par conséquent, elle est susceptible de constituer un procédé général

extrêmement intéressant pour réaliser des implantations matérielles virgule fixe très efficaces. Les articles [BriMul] et [BCEMT] ont proposé la première approche systématique qui calcule de bonnes approximations respectant les contraintes de la E-méthode et celles imposées par l'application visée. Elle reste toutefois très incomplète et on pourra consacrer une partie de ce stage à l'amélioration significative de l'existant.
– la synthèse de filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) nécessite le calcul d'une approximation rationnelle à coefficients contraints, avec de surcroit un contrôle assez précis quant à la localisation des pôles de la fraction. Il n'existe pas à notre connaissance un processus permettant d'effectuer ce calcul de manière satisfaisante.

La/le candidat(e) devra commencer par étudier les chapitres pertinents de [Che, Pow] et les articles [BC, BCEMT] (ou les chapitres de [Chev] correspondants) puis travailler sur une implantation en C (qui aura vocation à intégrer Sollya) ou en SAGE du calcul de la fraction minimax réelle puis d'un très bon approximant rationnel à coefficients nombres-machine. Dans le temps restant, on s'attaquera à une des applications visées.

Ce stage s'inscrit dans le cadre d'un projet plus général de développement d'outils d'approximation et notamment d'approximation efficace en machine. Ce sont des briques de base indispensables pour la synthèse de bibliothèques d'évaluation de fonctions ou de filtres numériques. Les notions qui devraient être abordées relèvent de l'analyse complexe, de la théorie de l'approximation (et plus généralement de l'analyse numérique), de la théorie algorithmique des nombres (via la réduction des réseaux euclidiens) et de l'arithmétique des ordinateurs.

Références

[BC] N. Brisebarre and S. Chevillard, *Efficient Polynomial L^∞-Approximations*, 18th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (ARITH-18), Montpellier (France), pages 169-176, June 2007.

[BCEMT] N. Brisebarre, S. Chevillard, M. Ercegovac, J.-M. Muller and S. Torres. *An Efficient Method for Evaluating Polynomial and Rational Function Approximations*. 19th IEEE Conference on Application-Specific Systems, Architectures and Processors (ASAP 2008). Leuven (Belgique), July 2008.

[BriMul] N. Brisebarre and J.-M. Muller. *Functions approximable by E-fractions*. Proc. 38th Conference on signals, systems and computers, Pacific Grove, California, U.S.A., pages 1341-1344, Nov. 2004.

[BMT] N. Brisebarre, J.-M. Muller and A. Tisserand, *Computing Machine-Efficient Polynomial Approximations*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 32, n. 2, Jun. 2006, 236-256.

[BH] N. Brisebarre and G. Hanrot, *Floating-Point L^2-Approximations*, 18th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (ARITH-18), Montpellier (France), pages 177-184, June 2007.

[Che] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, AMS/Chelsea Publication.

[Chev] S. Chevillard, *Évaluation efficace de fonctions numériques - Outils et exemples*, Thèse de doctorat, ENS Lyon, 2009, `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00460776/fr/`.

[Erc75] M.D. Ercegovac. *A general method for evaluation of functions and computation in a digital computer*. PhD thesis, Dept. of Computer Science, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1975.

[Erc77] M.D. Ercegovac. *A general hardware-oriented method for evaluation of functions and computations in a digital computer*. IEEE Trans. Comp., C-26(7) :667–680, 1977.

[GPT] P. Gonnet, R. Pachón, and L. N. Trefethen, *Robust rational interpolation and least-squares*, soumis. `http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/gonnet_pachon_trefethen.pdf`.

[Pow] M. J. D. Powell, *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press.