Langages formels, calculabilité et complexité
TD1

29 septembre 2016

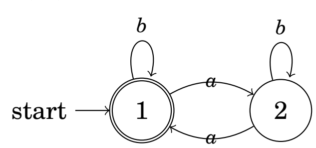
Exercice 1 Automates

Trouver des automates finis pour les langages suivants :

1. Les mots sur l'alphabet $\{a,b\}$ contenant le facteur aab ou $aaab$.
2. Les mots sur l'alphabet $\{a,b\}$ contenant un nombre pair de a et un nombre impair de b.
3. Les mots sur l'alphabet $\{a\}$ dont la longueur est un multiple de 3.
4. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, les mots sur l'alphabet $\{a\}$ dont la longueur est un multiple de d.
5. Les représentations binaires des entiers positifs pairs.
6. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, les représentations binaires des entiers positifs qui sont multiples de d.
7. Pour tout $c,d \in \mathbb{N}$, les représentations binaires des entiers positifs ayant la forme $c + k \cdot d$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Théorème de Kleene

1. Donner une expression régulière du langage décidé par l'automate suivant (prouver formellement).



Exercice 3 Non équivalence des Lemmes d'itération

Dans cet exercice nous allons considérer les 3 versions du Lemme de l'étoile :

a Si L est un langage reconnu par automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in L, \quad |u| \geq n \quad \exists v,t,w \in \Sigma^* \quad u = vtw, |t| > 0, \forall m \in \mathbb{N} \quad vt^m w \in L$$

b Si L est un langage reconnu par automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall \omega = rus \in L, \quad |u| \geq n \quad \exists v,t,w \in \Sigma^* \quad u = vtw, |t| > 0, \forall m \in \mathbb{N} \quad rvt^m ws \in L$$

c Si L est un langage reconnu par automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall u = ru_1u_2 \cdots u_n s \in L, \quad |u_i| \geq 1 \quad \exists 1 \leq i < j \leq n, \forall m \in \mathbb{N} \quad ru_1 \cdots u_{i-1}(u_i \cdots u_j)^m u_{j+1} \cdots u_n s \in L$$

1. Soit $L = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$, montrer que L vérifie le Lemme a mais pas le Lemme b.
2. Soit $L' = \{(ab)^n(cd)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^*(aa+bb+cc+dd+ac+bd)\Sigma^*$, avec $\Sigma = \{a,b,c,d\}$ montrer que L vérifie le Lemme b mais pas le Lemme c.

Exercice 4 Transformations régulières

Soit L un langage rationnel. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. $\text{Init}(L) = \{u \mid \exists v : uv \in L\}$
2. $\text{Min}(L) = \{w \mid w \in L$ et aucun préfixe propre de w n'est dans $L\}$
3. $\text{Max}(L) = \{w \mid w \in L$ et w n'est pas un préfixe propre d'un mot dans $L\}$
4. $\text{Cycle}(L) = \{uv \mid vu \in L\}$
5. $\frac{1}{2}L = \{u \mid \exists v : uv \in L \text{ et } |u| = |v|\}$
   Montrer que le langage suivant n'est pas nécessairement rationnel :
6. $\text{Bord}(L) = \{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$

Exercice 5 Lemme de l'étoile

Les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ sont-ils rationnels ? Utiliser les preuves par lemme de l'étoile.

1. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
2. $\{a^m b^n \mid m \equiv n \pmod{d}\}$ où $d \in \mathbb{N}$
3. $\{a^p \mid p$ est premier$\}$
4. $\{a^{F(n)} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ où F est un polynôme réel tel que $F[\mathbb{N}_0] \subseteq \mathbb{N}_0$

Exercice 6 Le barman aveugle

On dispose en carré 4 verres sur un plateau, chacun pouvant être à l'endroit ou à l'envers. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 verres dans la même position (tous à l'endroit ou tous à l'envers). Dès que les 4 verres sont dans la même position, la partie s'arrête et le barman a gagné). Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 verres. Il ne peut pas déterminer l'orientation des verres. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman.

1. Montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse le tourneur de plateau, il a moyen de gagner.
2. En combien de coups peut-il gagner ?