Sémantique et applications à la vérification
Examen (durée : 2h)

1er Juin 2018

Résumé

Dans ce problème, on veut abstraire des ensembles de traces calculés de manière inductive par des systèmes de transitions. Un accent particulier est mis sur la précision de l'analyse, ainsi on cherche à caractériser quand l'abstraction n'engendre pas de traces fictives. Enfin, on s'intéressera à accélérer le calcul de l'abstraction dans le cas on l'on sait *a priori* que certaines transitions commutent.

Tous les résultats utiles pour résoudre ce problème font l'objet de questions intermédiaires. Les notes de cours ne sont donc pas autorisées.

1 Treillis complets

Définition 1.1 (ordre partiel). *Un ordre partiel est un couple $(X, \sqsubseteq_X)$ tel que X soit un ensemble et $\sqsubseteq_X$ soit une relation binaire sur l'ensemble X vérifiant, pour tous éléments x, y, z de l'ensemble X, les trois propriétés suivantes :*

1. *(réflexivité) $x \sqsubseteq_X x$;*
2. *(anti-symétrie) $[x \sqsubseteq_X y \wedge y \sqsubseteq_X x] \Longrightarrow x = y$;*
3. *(transitivité) $[x \sqsubseteq_X y \wedge y \sqsubseteq_X z] \Longrightarrow x \sqsubseteq_X z$.*

Question 1.1 (dualité). *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel.*

Montrer que la paire $(X, \sqsupseteq_X)$ où $\sqsupseteq_X$ est la relation binaire sur l'ensemble X qui est définie par $x \sqsupseteq_X y$ si et seulement si $y \sqsubseteq_X x$, est également un ordre partiel.

Définition 1.2 (meilleur majorant). *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit A une partie de X et x un élément de X. On dira que x est un meilleur majorant pour l'ensemble A si et seulement si les deux propriétés suivantes sont réalisées :*

1. *(majorant) pour tout élément y de l'ensemble A, on a : $y \sqsubseteq_X x$*
2. *(meilleur) $x \sqsubseteq_X z$ pour tout élément z de l'ensemble X tel que $y \sqsubseteq_X z$ pour tout élément y de l'ensemble A.*

Question 1.2 (unicité du meilleur majorant). *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel et A une partie de X. Montrer que si il existe, le meilleur majorant de A est unique.*

Dans ce cas, il sera noté $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$.

Définition 1.3 (meilleur minorant). *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit A une partie de X et x un élément de X. On dira que x est un meilleur minorant pour l'ensemble A si et seulement si les deux propriétés suivantes sont réalisées :*

1. *(minorant) pour tout élément y de l'ensemble A, on a : $x \sqsubseteq_X y$*
2. *(meilleur) $z \sqsubseteq_X x$ pour tout élément z de l'ensemble X tel que $z \sqsubseteq_X y$ pour tout élément y de l'ensemble A.*

Question 1.3 (unicité du meilleur minorant)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel et* A *une partie de* X*. Montrer que si il existe, le meilleur minorant de* A *est unique.*

Dans ce cas, il sera noté $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} A$*.*

Définition 1.4 (plus petit élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel. On dira qu'un élément* x *de l'ensemble* X *est un plus petit élément de l'ordre partiel* $(X, \sqsubseteq_X)$ *si et seulement si pour tout élément* y *de l'ensemble* X*, on a :* $x \sqsubseteq_X y$*.*

Question 1.4 (unicité du plus petit élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel. Montrer que* $(X, \sqsubseteq_X)$ *admet au plus un plus petit élément.*

Danc ce cas, il sera noté $\bot_{\sqsubseteq_X}$*.*

Question 1.5. *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel admettant un plus petit élément* $\bot_{\sqsubseteq_X}$*. Soit* A *une partie de* X *qui admette un meilleure majorant.*

Montrer que $A \cup \{\bot_{\sqsubseteq_X}\}$ *admet un meilleure majorant et que* $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A \cup \{\bot_{\sqsubseteq_X}\} = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$*.*

Définition 1.5 (plus grand élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel. On dira qu'un élément* x *de l'ensemble* X *est un plus grand élément de l'ordre partiel* $(X, \sqsubseteq_X)$ *si et seulement si pour tout élément* y *de l'ensemble* X*, on a :* $y \sqsubseteq_X x$*.*

Question 1.6 (unicité du plus grand élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel. Montrer que* $(X, \sqsubseteq_X)$ *admet au plus un plus grand élément.*

Danc ce cas, il sera noté $\top_{\sqsubseteq_X}$*.*

Définition 1.6 (treillis complet)**.** *Un treillis complet est un ordre partiel* $(X, \sqsubseteq_X)$ *tel que toute partie de l'ensemble* X *ait un meilleur majorant.*

Question 1.7 (existence des meilleurs minorants)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que toute partie de l'ensemble* X *admet un meilleur minorant.*

Question 1.8 (treillis complet dual)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que l'ordre partiel* $(X, \sqsupseteq_X)$ *est également un treillis complet.*

Question 1.9 (existence du plus petit élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que l'ensemble* X *admet un plus petit élément.*

Question 1.10 (existence du plus grand élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que l'ensemble* X *admet une plus grand élément.*

2 Opérateurs de clôture

Définition 2.1 (fonctions croissantes)**.** *Une fonction* $\mathbb{F}$ *d'un ordre partiel* $(X, \sqsubseteq_X)$ *vers un ordre partiel* $(Y, \sqsubseteq_Y)$ *est dite croissante si et seulement si pour tous éléments* x, x' *de l'ensemble* X *tels que* $x \sqsubseteq_X x'$*, on a :* $\mathbb{F}(x) \sqsubseteq_Y \mathbb{F}(x')$*.*

Définition 2.2 (opérateur de clôture supérieure)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel. Un opérateur de clôture supérieure est une fonction* ρ *de l'ensemble* X *vers lui-même de sortes que les trois propriétés suivantes soient vérifiées, pour tous éléments* x, x' *de l'ensemble* X *:*

1. *(idempotence)* $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$ *;*
2. *(croissance) si* $x \sqsubseteq_X x'$*, alors* $\rho(x) \sqsubseteq_X \rho(x')$ *;*
3. *(extensivité)* $x \sqsubseteq_X \rho(x)$*.*

Question 2.1. *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet et* ρ *un opérateur de clôture supérieure défini sur l'ensemble* X*. Soit* A *une partie de l'ensemble* X*. Montrer que* $\rho(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} \{\rho(a) \mid a \in A\}) = \bigsqcap_{\sqsubseteq_X} \{\rho(a) \mid a \in A\}$*.*

Définition 2.3 (opérateur de clôture inférieure)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Un opérateur de clôture inférieure est une fonction ρ de l'ensemble X vers lui-même de sortes que les trois propriétés suivantes soient vérifiées, pour tous éléments x, x' de l'ensemble X :*

- *(idempotence) $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$;*
- *(croissance) si $x \sqsubseteq_X x'$, alors $\rho(x) \sqsubseteq_X \rho(x')$;*
- *(extensivité) $\rho(x) \sqsubseteq_X x$.*

3 Correspondances de Galois

Définition 3.1 (fonction de concrétisation)**.** *On appelle fonction de concrétisation toute fonction croissante d'un ordre partiel vers un ordre partiel.*

Définition 3.2 (approximation)**.** *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux ordres partiels et une fonction de concrétisation γ de l'ensemble A vers l'ensemble C. Pour tout élément $c \in C$ et tout élément $a \in A$, on dira que l'élément a est une approximation de l'élément c si et seulement si $c \sqsubseteq_C \gamma(a)$.*

Définition 3.3 (correspondance de Galois)**.** *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux ordres partiels et une fonction de concrétisation γ de l'ensemble A vers l'ensemble C.*

On dira que la fonction γ induit une correspondance de Galois si et seulement si pour tout élément $c \in C$, l'ensemble des approximations de c admet un meilleur minorant, lui-même élément de l'ensemble C. Ce plus petit élément sera alors noté $\alpha(c)$. La paire (α, γ) est alors la correspondance de Galois induite par la fonction γ.

On notera alors $(C, \sqsubseteq_C) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (A, \sqsubseteq_A)$.

Question 3.1 (caractérisation des correspondances de Galois)**.** *Soit $(C, \sqsubseteq_C) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (A, \sqsubseteq_A)$ une correspondance de Galois. Montrer que pour tout élément $c \in C$ et $a \in A$, on a : $\alpha(c) \sqsubseteq_A a$ si et seulement si $c \sqsubseteq_C \gamma(a)$.*

Question 3.2 (propriétés usuelles)**.** *Soit $(C, \sqsubseteq_C) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (A, \sqsubseteq_A)$ une correspondance de Galois. Soient x, x' deux éléments de l'ensemble $(C, \sqsubseteq_C)$ tels que $x \sqsubseteq_C x'$ et y un élément de l'ensemble $(A, \sqsubseteq_A)$. Soit X une partie de C ayant un meilleur majorant.*

Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiés :

1. *$x \sqsubseteq_C \gamma(\alpha(x))$;*
2. *$\alpha(\gamma(y)) \sqsubseteq_A y$;*
3. *$\alpha(x) \sqsubseteq_A \alpha(x')$;*
4. *$\alpha(\gamma(\alpha(x))) = x$;*
5. *$\gamma(\alpha(\gamma(y))) = y$;*
6. *l'ensemble $\{\alpha(x) \mid x \in X\}$ a un meilleur majorant et celui-ci est égal à $\alpha(\bigsqcup_{\sqsubseteq_C} X)$.*

4 Ensemble de traces finies

Dans la suite de l'épreuve, on supposera fixés deux ensembles $\mathcal{Q}$ et Σ. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{Q}$ sont appelés états, ceux de l'ensemble Σ sont appelés étiquettes de transition.

Définition 4.1 (traces)**.** *Une trace de taille 0 est un état (dans l'ensemble $\mathcal{Q}$). Pour $n > 0$, une trace de taille n est un n-uplet $(q_i, \lambda_i, q'_i)_{0 \le i < n} \in (\mathcal{Q} \times \Sigma \times \mathcal{Q})^n$ qui vérifie la propriété $q'_i = q_{i+1}$ pour tout entier i compris entre 0 et $n-2$ (dans ce cas, l'état q'_{n-1} sera aussi noté q_n).*

Une telle trace τ sera notée $q_0 \overset{\lambda_0}{\to} \dots \overset{\lambda_{n-1}}{\to} q_n$. L'état q_0 est appelé l'état initial de la trace τ et sera noté i_τ. L'état q_n est appelé l'état final de la trace τ et sera noté f_τ. On note aussi all_τ l'ensemble des états

$\{q_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ et $trans_\tau$ l'ensemble des transitions $\{(q_i, \lambda_i, q_{i+1}) \mid 0 \leq i < n\}$. Dans le cas d'une trace de taille 0, l'unique état est à la fois l'état initial et l'état final et l'ensemble des transitions de la trace est vide.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de toutes les traces.

Deux traces τ et τ' de tailles respectives n et n' tels que l'état final f_τ de la trace τ soit aussi l'état initial $i_{\tau'}$ de la trace τ', se composent pour former la trace $(q''_i, \lambda''_i, q''_{i+1})_{0 \leq i < n+n'}$ qui est définie par $q''_i = q_i$ et $\lambda''_i = \lambda_i$ pour tout entier $i < n$ et $q''_i = q_{i-n}$ et $\lambda''_i = \lambda_{i-n}$ pour tout entier i compris entre n et $n + n' - 1$. Cette trace est alors notée $\tau.\tau'$.

Lorsqu'une trace τ peut s'écrire sous la forme $\tau'.\tau''$, on dit que la trace τ' est un préfixe de τ.

Définition 4.2 (systèmes de transitions)**.** *Un système de transitions est un triplet (I, S, T) avec $I, S \subseteq \mathcal{Q}$ et $T \subseteq S \times \Sigma \times S$.*

On note $(\mathbb{T}, \sqsubseteq_{\mathbb{T}})$ l'ensemble des systèmes de transitions ordonné par l'inclusion ensembliste appliquée composante par composante.

Définition 4.3 (trace reconnue par un système de transitions)**.** *Soit τ une trace et (I, S, T) un système de transition.*

On dit que la trace τ est reconnue par le système de transitions (I, S, T) si et seulement si $i_\tau \in I$ et $trans_\tau \subseteq T$.

Question 4.1. *Montrer que la fonction $\gamma_{\mathbb{T}}$ qui associe à chaque système de transitions l'ensemble des traces qu'il reconnait est une fonction de concrétisation.*

Question 4.2. *Proposer une fonction $\alpha_{\mathbb{T}}$ de qui associe à chaque ensemble de traces un système de transitions de sortes que $(\wp(\mathcal{T}), \subseteq) \underset{\alpha_{\mathbb{T}}}{\overset{\gamma_{\mathbb{T}}}{\leftrightarrows}} (\mathbb{T}, \sqsubseteq_{\mathbb{T}})$ soit une correspondance de Galois.*

Question 4.3. *Donner un ensemble de traces, stable par préfixes (i.e. tout préfixe de trace de cet ensemble est une aussi une trace de cet ensemble) qui n'est pas invariant pour l'opérateur de clôture $\gamma_{\mathbb{T}} \circ \alpha_{\mathbb{T}}$.*

Question 4.4. *Donner un système de transition qui n'est pas invariant pour l'opérateur de clôture $\alpha_{\mathbb{T}} \circ \gamma_{\mathbb{T}}$.*

5 Plus petits points fixes dans un treillis complet

Définition 5.1 (point-fixe)**.** *Soit X un ensemble. Soit $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. On appelle point fixe de la fonction $\mathbb{F}$ tout élément $x \in X$ tel $f(x) = x$. On note fp $\mathbb{F}$ l'ensemble des points fixes de la fonction $\mathbb{F}$.*

Définition 5.2. *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. On appelle plus petit point fixe de la fonction $\mathbb{F}$ tout élément $x \in fp\ \mathbb{F}$ tel que $x \sqsubseteq_X y$ pour tout élément $y \in fp\ \mathbb{F}$.*

Question 5.1. *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. Montrer que $\mathbb{F}$ admet au plus un plus petit point fixe. Quand il existe, le plus petit point fixe de $\mathbb{F}$ sera noté lfp $\mathbb{F}$.*

Question 5.2 (théorème de Tarski)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction croissante de l'ensemble X dans lui-même.*

Montrer que la fonction $\mathbb{F}$ admet un plus petit point fixe et que $lfp\ \mathbb{F} = \bigsqcap_{\sqsubseteq_X} \{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$.

Définition 5.3 (fonctions continues)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. On dira que la fonction $\mathbb{F}$ est continue si et seulement si, pour toute partie A de l'ensemble X, on a $f(\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A) = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} \{f(a) \mid a \in A\}$.*

Question 5.3. *Montrer que toute fonction continue est croissante.*

Question 5.4 (théorème de Kleene)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble X dans lui-même. Montrer que le plus petit point fixe de $\mathbb{F}$ est égal à l'élément $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} \{\mathbb{F}^n(\bot_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

6 Approximations d'ensembles de traces définis inductivement

On considère une partie $\mathcal{Q}_0$ de $\mathcal{Q}$ et une fonction $\textsc{cont}$ de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{T}$ telle que pour tout état $q \in \mathcal{Q}$ et toute trace τ dans l'ensemble $\textsc{cont}(q)$, on ait $i_\tau(\tau) = q$.

On définit la fonction $\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ de l'ensemble $\wp(\mathcal{T})$ vers lui même, qui a tout ensemble de traces X associe l'ensemble de trace $\mathcal{Q}_0 \cup \{\tau.\tau' \mid \tau \in X, \tau' \in \textsc{cont}(f_\tau(\tau))\}$.

Question 6.1. *Montrer que la fonction $\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ admet un plus petit point fixe et que ce plus petit point fixe est égal à l'ensemble $\bigcup\{\mathbb{F}^n_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}(\emptyset)\}$.*

On définit la fonction $\mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ de l'ensemble $\mathbb{T}$ dans lui même, qui a tout système de transitions (I, S, T) associe le système de transitions (I', S', T') où :
- $I = I \cup \mathcal{Q}_0$;
- $S = I \cup \{\bigcup all_\tau \mid \tau \in \bigcup\{\textsc{cont}(q) \mid q \in S\}\}$;
- $T = \bigcup\{trans_\tau \mid \tau \in \bigcup\{\textsc{cont}(q) \mid q \in S\}\}$.

Question 6.2. *Montrer que pour tout élément $x \in C$ et pour tout élément $y \in A$, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $[\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}](y)$;
2. *si les ensembles $\mathcal{Q}$ et Σ admettent au moins un élément chacun, il existe un élément y_c in A tel que* $[\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \gamma](y) \neq [\mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}](y)$;
3. $[\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \gamma \circ \alpha](x) = [\mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \alpha](y)$.

Question 6.3. *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soient $\mathbb{F}$ une fonction croissante de l'ensemble C dans lui-même et $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A dans lui-même telles que : pour tout élément $y \in A$, on ait : $[\mathbb{F} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp](y)$.*

Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\sharp$ admettent des plus petits points fixes. Montrer que $lfp\, \mathbb{F} \sqsubseteq_C lfp\, \mathbb{F}^\sharp$.

Question 6.4. *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soient $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble C dans lui-même et $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A dans lui-même.*

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

1. *pour tout élément $y \in A$, on ait :* $[\mathbb{F} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp](y)$;
2. $\mathbb{F}^\sharp \circ \alpha = \alpha \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha$.

Montrer que : $lfp\, \mathbb{F} = \gamma(lfp\, \mathbb{F}^\sharp)$ si et seulement si $lfp\, \mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$.

Astuce 6.1. *Pour prouver le sens indirect de l'équivalence, on commencera par prouver que $\alpha(lfp\, \mathbb{F}) = lfp\, \mathbb{F}^\sharp$.*

Question 6.5. *Donner un critère syntaxique sur la fonction $\textsc{cont}$ pour que la fonction $\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ satisfasse la contrainte $lfp\, \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \in \{\gamma_{\mathbb{T}}(y) \mid y \in \mathbb{T}\}$.*

Question 6.6. *Conclure.*

7 Transitions qui commutent

Dans cette partie, on suppose que pour toute transition, l'état avant cette transition et l'étiquette de cette transition caractérise entièrement l'état que l'on atteint après l'exécution de cette transition. En conséquence, on suppose que l'on dispose d'une fonction f qui associe à chaque paire $(q, \lambda) \in \mathcal{Q} \times \Sigma$ un élément de l'ensemble $\mathcal{Q}$ telle que toutes les traces sont de la forme $(q_i, \lambda_i, f(q_i, \lambda_i))$. On suppose également que pour tout état $q \in \mathcal{Q}$, $\lambda, \lambda' \in \Sigma$, on ait : $f(f(q, \lambda), \lambda') = f(f(q, \lambda'), \lambda)$.

Exemple 7.1. *On considère les traces suivantes :*

1. $\tau_1 = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{d} 6$;

2. $\tau_2 = 1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{d} 6$;
3. $\tau_3 = 1 \xrightarrow{d} 7 \xrightarrow{c} 8 \xrightarrow{a} 9 \xrightarrow{b} 11$;
4. $\tau_4 = 1 \xrightarrow{d} 7 \xrightarrow{c} 8 \xrightarrow{b} 10 \xrightarrow{a} 11$.

Intuitivement, dans une trace de l'ensemble $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$, si on permute deux transitions consécutives étiquetées a et b (ou inversement), quitte à changer l'état intermédiaire, on obtient encore une trace de l'ensemble $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$. On dit alors que les transitions étiquetées a commutent avec celles étiquetées b. Ce n'est pas le cas des transitions étiquetées c et d.

Question 7.1. *Soient X un ensemble de traces et $\lambda, \lambda' \in \Sigma$ deux étiquettes de transitions. Donner une définition formelle pour déterminer si les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces X.*

On s'assurera qu'étant donné une famille d'ensemble de traces $(X_i)_{i \in I}$ et deux étiquettes de transitions $\lambda, \lambda' \in \Sigma$, telles que pour tout indice $i \in I$, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces X_i, alors les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.

Question 7.2. *Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\Sigma \times \Sigma$. Montrer qu'il existe un opérateur de clôture supérieure ρ_C qui associe à chaque ensemble de traces X, le plus petit ensemble de traces $\rho_{\mathcal{C}}(X)$ contenant X telles que dans l'ensemble de traces $\rho_{\mathcal{C}}(X)$, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.*

Question 7.3. *Soit $(C, \sqsubseteq_C)$ un treillis complet. Soit ρ un opérateur de clôture supérieure sur l'ensemble C. Soit $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble C vers lui-même.*

On suppose que la propriété suivante :

$$\rho(\mathit{lfp}\ \mathbb{F}) = \mathit{lfp}\ \mathbb{F}$$

est satisfaite.

Montrer que la fonction $[\rho \circ \mathbb{F}]$ admet un plus petit point fixe dans le treillis $(C, \sqsubseteq_C)$ et que $\mathit{lfp}\ \mathbb{F} = \mathit{lfp}\ [\rho \circ \mathbb{F}]$.

Question 7.4. *Soit $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soit ρ un opérateur de clôture supérieure sur l'ensemble C. Soit $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble $(C, \sqsubseteq_C)$ vers lui même. Soit $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A vers lui-même.*

On suppose que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\rho(\mathit{lfp}\ \mathbb{F}) = \mathit{lfp}\ \mathbb{F}$;
2. $[\alpha \circ \mathbb{F} \circ \gamma](y) \sqsubseteq_A \mathbb{F}^\sharp(y)$, *pour tout élément* $y \in A$;
3. $[\mathbb{F}^\sharp \circ \alpha](x) \sqsubseteq_A [\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](x)$, *pour tout élément* $x \in C$.

Montrer que $\mathit{lfp}\ \mathbb{F} = \gamma(\mathit{lfp}\ \mathbb{F}^\sharp)$ si et seulement si $\mathit{lfp}\ \mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$.

Question 7.5. *Conclure sur notre cas d'étude.*