Sémantique et applications à la vérification
Examen (durée : 2h)

1er Juin 2018

Résumé

Dans ce problème, on veut abstraire des ensembles de traces calculés de manière inductive par des systèmes de transitions. Un accent particulier est mis sur la précision de l'analyse, ainsi on cherche à caractériser quand l'abstraction n'engendre pas de traces fictives. Enfin, on s'intéressera à accélérer le calcul de l'abstraction dans le cas on l'on sait *a priori* que certaines transitions commutent.

Tous les résultats utiles pour résoudre ce problème font l'objet de questions intermédiaires. Les notes de cours ne sont donc pas autorisées.

1 Treillis complets

Définition 1.1 (ordre partiel)**.** *Un ordre partiel est un couple* $(X, \sqsubseteq_X)$ *tel que* X *soit un ensemble et* $\sqsubseteq_X$ *soit une relation binaire sur l'ensemble* X *vérifiant, pour tous éléments* x, y, z *de l'ensemble* X, *les trois propriétés suivantes :*

1. *(réflexivité)* $x \sqsubseteq_X x$ *;*
2. *(anti-symétrie)* $[x \sqsubseteq_X y \wedge y \sqsubseteq_X x] \Longrightarrow x = y$ *;*
3. *(transitivité)* $[x \sqsubseteq_X y \wedge y \sqsubseteq_X z] \Longrightarrow x \sqsubseteq_X z$.

Question 1.1 (dualité)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel.*

Montrer que la paire $(X, \sqsupseteq_X)$ *où* $\sqsupseteq_X$ *est la relation binaire sur l'ensemble* X *qui est définie par* $x \sqsupseteq_X y$ *si et seulement si* $y \sqsubseteq_X x$, *est également un ordre partiel.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel.

Soient x, y, et z trois élément de l'ensemble X.

1. $(X, \sqsubseteq_X)$ est un ordre partiel. Donc d'après Déf.1.1.(1), on a $x \sqsubseteq_X x$. D'où, par définition de la relation $\sqsupseteq_X$, $x \sqsupseteq_X x$.
2. Supposons que $x \sqsupseteq_X y$ et $y \sqsupseteq_X x$. D'après la définition de la relation $\sqsupseteq_X$, on a $y \sqsubseteq_X x$ et $x \sqsubseteq_X y$. Ainsi, $x \sqsubseteq_X y$ et $y \sqsubseteq_X x$. Puis, comme $(X, \sqsubseteq_X)$ est un ordre partiel, par Déf. 1.1.(2), on obtient $x = y$.
3. Supposons que $x \sqsupseteq_X y$ et $y \sqsupseteq_X z$. D'après la définition de la relation $\sqsupseteq_X$, on a $y \sqsubseteq_X x$ et $z \sqsubseteq_X y$. Ainsi, $z \sqsubseteq_X y$ et $y \sqsubseteq_X x$. Puis, comme $(X, \sqsubseteq_X)$ est un ordre partiel, par Déf. 1.1.(3), on obtient $z \sqsubseteq_X x$. D'après la définition de la relation $\sqsupseteq_X$, on a donc $x \sqsubseteq_X z$.

Ainsi, par Déf. 1.1, la couple $(X, \sqsupseteq_X)$ est un ordre partiel.

Définition 1.2 (meilleur majorant)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un ordre partiel. Soit* A *une partie de* X *et* x *un élément de* X. *On dira que* x *est un meilleur majorant pour l'ensemble* A *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont réalisées :*

1. *(majorant) pour tout élément y de l'ensemble A, on a : $y \sqsubseteq_X x$*
2. *(meilleur) $x \sqsubseteq_X z$ pour tout élément z de l'ensemble X tel que $y \sqsubseteq_X z$ pour tout élément y de l'ensemble A.*

Question 1.2 (unicité du meilleur majorant)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel et A une partie de X. Montrer que si il existe, le meilleur majorant de A est unique.*

Dans ce cas, il sera noté $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$.

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel et A une partie de X.
Soit x et y deux éléments de X.
On suppose que x et y sont deux meilleurs majorants de A.
Comme x et y sont deux meilleurs majorants de A, par Déf. 1.2.(1), on a, pour élément $z \in A$, $z \sqsubseteq_X x$ et $z \sqsubseteq_X y$.
Comme x est un meilleur majorant de A, on a, en appliquant Déf. 1.2.(2) pour $z = y$, $x \sqsubseteq_X y$.
De même, comme y est un meilleur majorant, on obtient, en appliquant Déf. 1.2.(2) pour $z = x$, $y \sqsubseteq_X x$.
Comme $(X, \sqsubseteq_X)$ est un ordre partiel, par Déf. 1.1.(2), on peut conclure que $x = y$.

Définition 1.3 (meilleur minorant)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit A une partie de X et x un élément de X. On dira que x est un meilleur minorant pour l'ensemble A si et seulement si les deux propriétés suivantes sont réalisées :*

1. *(minorant) pour tout élément y de l'ensemble A, on a : $x \sqsubseteq_X y$*
2. *(meilleur) $z \sqsubseteq_X x$ pour tout élément z de l'ensemble X tel que $z \sqsubseteq_X y$ pour tout élément y de l'ensemble A.*

Question 1.3 (unicité du meilleur minorant)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel et A une partie de X. Montrer que si il existe, le meilleur minorant de A est unique.*

Dans ce cas, il sera noté $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} A$.

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel et A une partie de X.
Soit x un meilleur minorant de A pour l'ordre partiel $(X, \sqsubseteq_X)$.
On a, par Déf. 1.3 :

1. pour tout élément y de l'ensemble A, on a : $x \sqsubseteq_X y$
2. $z \sqsubseteq_X x$ pour tout élément z de l'ensemble X tel que $z \sqsubseteq_X y$ pour tout élément y de l'ensemble A.

Par la question 1.1, on sait que $(X, \sqsupseteq_X)$ est un ordre partiel.
Et par définition de la relation $\sqsupseteq_X$, on a :

1. pour tout élément y de l'ensemble A, on a : $y \sqsupseteq_X x$
2. $x \sqsupseteq_X z$ pour tout élément z de l'ensemble X tel que $y \sqsupseteq_X z$ pour tout élément y de l'ensemble A.

Ainsi, par Déf. 1.2, x est un meilleur majorant de l'ensemble A pour l'ordre partiel $(X, \sqsupseteq_X)$.

Prenons, maintenant deux meilleurs minorants de A pour l'ordre partiel $(X, \sqsubseteq_X)$.
Ce sont donc des meilleurs majorants de A pour l'ordre partiel $(X, \sqsupseteq_X)$.
D'après la question 1.2, on a $x = y$.

Définition 1.4 (plus petit élément)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. On dira qu'un élément x de l'ensemble X est un plus petit élément de l'ordre partiel $(X, \sqsubseteq_X)$ si et seulement si pour tout élément y de l'ensemble X, on a : $x \sqsubseteq_X y$.*

Question 1.4 (unicité du plus petit élément)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Montrer que $(X, \sqsubseteq_X)$ admet au plus un plus petit élément.*

Danc ce cas, il sera noté $\bot_{\sqsubseteq_X}$.

> Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel.
>
> Par Défs. 1.3 et 1.4, un élément x est le plus petit élément de l'ensemble X si et seulement si x est le meilleur minorant de l'ensemble X.
>
> S'il existe, par Question 1.3, le plus petit élément d'un ordre partiel est donc unique.

Question 1.5. *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel admettant un plus petit élément $\bot_{\sqsubseteq_X}$. Soit A une partie de X qui admette un meilleure majorant.*

Montrer que $A \cup \{\bot_{\sqsubseteq_X}\}$ admet un meilleure majorant et que $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A \cup \{\bot_{\sqsubseteq_X}\} = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$.

> Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel admettant un plus petit élément $\bot_{\sqsubseteq_X}$. Soit $A \subseteq X$ qui admette un meilleure majorant.
>
> 1. Soit $x \in A \cup \{\bot_{\sqsubseteq_X}\}$.
>   (a) On suppose que $x = \bot_{\sqsubseteq_X}$.
>   Par Déf. 1.4, on a $\bot_{\sqsubseteq_X} \sqsubseteq_X \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$.
>   (b) On suppose que $x \neq \bot_{\sqsubseteq_X}$.
>   On a donc $x \in A$.
>   Par Déf. 1.2.(1), $x \sqsubseteq_X \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$.
>
>   Donc $x \sqsubseteq_X \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$.
> 2. Soit $y \in X$ tel que pour tout $x \in \{\bot_{\sqsubseteq_X}\} \cup A$, on ait $x \sqsubseteq_X y$.
>   Pour tout élément $x \in A$, on a $x \sqsubseteq_X y$.
>   Par Déf. 1.2.(2), on obtient $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A \sqsubseteq_X y$.
>
> Par Déf. 1.2, $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$ est une borne supérieure pour l'ensemble $\{\bot_{\sqsubseteq_X}\} \cup A$. Par Déf. 1.2, on conclut que $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} \{\bot_{\sqsubseteq_X}\} \cup A = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A$.

Définition 1.5 (plus grand élément)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. On dira qu'un élément x de l'ensemble X est un plus grand élément de l'ordre partiel $(X, \sqsubseteq_X)$ si et seulement si pour tout élément y de l'ensemble X, on a : $y \sqsubseteq_X x$.*

Question 1.6 (unicité du plus grand élément)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Montrer que $(X, \sqsubseteq_X)$ admet au plus un plus grand élément.*

Danc ce cas, il sera noté $\top_{\sqsubseteq_X}$.

> Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel.
>
> Soit x un plus grand élément de X pour l'ordre $\sqsubseteq_X$.
>
> Pour tout élément $y \in X$, on a, par Déf. 1.5, $x \sqsubseteq_X y$.
>
> Par la question 1.1, on sait que $(X, \sqsupseteq_X)$ est un ordre partiel.
>
> Et par définition de la relation $\sqsupseteq_X$, on a pour tout élément $y \in X$, $y \sqsupseteq_X x$.
>
> Donc d'après Déf. 1.4, x est un plus petit élément de l'ensemble X pour l'ordre partiel $\sqsupseteq_X$.
>
> Soient x et y deux plus grands éléments de l'ensemble X pour l'ordre partiel $\sqsubseteq_X$.
>
> x et y sont deux plus petits éléments de l'ensemble X pour l'ordre $\sqsupseteq_X$.
>
> D'après la question 1.4, on a : $x = y$.

Définition 1.6 (treillis complet)**.** *Un treillis complet est un ordre partiel $(X, \sqsubseteq_X)$ tel que toute partie de l'ensemble X ait un meilleur majorant.*

Question 1.7 (existence des meilleurs minorants)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que toute partie de l'ensemble* X *admet un meilleur minorant.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et A une partie finie de X.
On note B l'ensemble $\{b \in X \mid b \sqsubseteq_X a, \forall a \in A\}$.
Par Déf. 1.6, l'ensemble B admet un meilleur majorant.
On vérifie que $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} B$ est un meilleur minorant de A.

1. Soit $a \in A$. Par définition de B, pour tout élément $b \in B$, on a $b \sqsubseteq_X a$. Donc par Déf. 1.2.(2), on a : $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} B \sqsubseteq_X a$.
2. Soit $c \in X$ tel que, pour tout élément $a \in A$, $c \sqsubseteq_X a$. Par définition de B, on a : $c \in B$. Donc par Déf. 1.2.(1), on a : $c \sqsubseteq_X \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} B$.

D'après Déf. 1.3, $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} B$ est un meilleur minorant de A.

Question 1.8 (treillis complet dual)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que l'ordre partiel* $(X, \sqsupseteq_X)$ *est également un treillis complet.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet.
On sait par la question 1.1, que $(X, \sqsupseteq_X)$ est un ordre partiel.
Soit A une partie de X.
Par la question 1.7, on sait que A admet un meilleur minorant pour l'ordre partiel $(X, \sqsubseteq_X)$.
Donc, par Déf. 1.3, on a :

1. pour tout $y \in A$, $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} A \sqsubseteq_X y$;
2. pour tout $y \in X$ tel que pour tout $z \in A$, $y \sqsubseteq_X z$, on a $y \sqsubseteq_X \bigsqcap_{\sqsubseteq_X} A$.

Par la question 1.1, on a :

1. pour tout $y \in A$, $y \sqsupseteq_X \bigsqcap_{\sqsubseteq_X} A$;
2. pour tout $y \in X$ tel que pour tout $z \in A$, $z \sqsupseteq_X y$, on a $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} A \sqsupseteq_X y$.

Ainsi, par Déf. 1.2, $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} A$ est un meilleur majorant de l'ensemble A pour l'ordre $\sqsupseteq_X$.
Donc par Déf. 1.6, $(X, \sqsupseteq_X)$ est un treillis complet.

Question 1.9 (existence du plus petit élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que l'ensemble* X *admet un plus petit élément.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet.
Par la question 1.7, l'ensemble X admet un meilleur minorant.
Par Déf. 1.3.(1), on a, pour tout $x \in X$, $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} X \sqsubseteq_X x$.
Donc, d'après Déf. 1.4, $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} X$ est un plus petit élément de X.

Question 1.10 (existence du plus grand élément)**.** *Soit* $(X, \sqsubseteq_X)$ *un treillis complet. Montrer que l'ensemble* X *admet une plus grand élément.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet.
Par Déf. 1.6, l'ensemble X admet un meilleur majorant.
Par Déf. 1.2.(1), on a, pour tout $x \in X$, $x \sqsubseteq_X \bigsqcup_{\sqsubseteq_X} X$.
Donc, d'après Déf. 1.5, $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} X$ est un plus grand élément de X.

2 Opérateurs de clôture

Définition 2.1 (fonctions croissantes)**.** *Une fonction $\mathbb{F}$ d'un ordre partiel $(X, \sqsubseteq_X)$ vers un ordre partiel $(Y, \sqsubseteq_Y)$ est dite croissante si et seulement si pour tous éléments x, x' de l'ensemble X tels que $x \sqsubseteq_X x'$, on a : $\mathbb{F}(x) \sqsubseteq_Y \mathbb{F}(x')$.*

Définition 2.2 (opérateur de clôture supérieure)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Un opérateur de clôture supérieure est une fonction ρ de l'ensemble X vers lui-même de sortes que les trois propriétés suivantes soient vérifiées, pour tous éléments x, x' de l'ensemble X :*

1. *(idempotence) $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$;*
2. *(croissance) si $x \sqsubseteq_X x'$, alors $\rho(x) \sqsubseteq_X \rho(x')$;*
3. *(extensivité) $x \sqsubseteq_X \rho(x)$.*

Question 2.1. *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et ρ un opérateur de clôture supérieure défini sur l'ensemble X. Soit A une partie de l'ensemble X. Montrer que $\rho(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\}) = \bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\}$.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et ρ un opérateur de clôture supérieure défini sur l'ensemble X. Soit A une partie de l'ensemble X.

Par Déf. 2.2.(3), on a : $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\} \sqsubseteq_X \rho(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\})$.

Par ailleurs, pour $a \in A$, on a : $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\} \sqsubseteq_X a$. Puis par Déf. 2.2.(2), on a : $\rho(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\}) \sqsubseteq_X \rho(a)$.

Donc par Déf. 1.3.(2), on a : $\rho(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\}) \sqsubseteq_X \bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\}$.

Ainsi, par Déf. 1.1.(2), on conclut que $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\} = \rho(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{\rho(a) \mid a \in A\})$.

Définition 2.3 (opérateur de clôture inférieure)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Un opérateur de clôture inférieure est une fonction ρ de l'ensemble X vers lui-même de sortes que les trois propriétés suivantes soient vérifiées, pour tous éléments x, x' de l'ensemble X :*

— *(idempotence) $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$;*
— *(croissance) si $x \sqsubseteq_X x'$, alors $\rho(x) \sqsubseteq_X \rho(x')$;*
— *(extensivité) $\rho(x) \sqsubseteq_X x$.*

3 Correspondances de Galois

Définition 3.1 (fonction de concrétisation)**.** *On appelle fonction de concrétisation toute fonction croissante d'un ordre partiel vers un ordre partiel.*

Définition 3.2 (approximation)**.** *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux ordres partiels et une fonction de concrétisation γ de l'ensemble A vers l'ensemble C. Pour tout élément $c \in C$ et tout élément $a \in A$, on dira que l'élément a est une approximation de l'élément c si et seulement si $c \sqsubseteq_C \gamma(a)$.*

Définition 3.3 (correspondance de Galois)**.** *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux ordres partiels et une fonction de concrétisation γ de l'ensemble A vers l'ensemble C.*

On dira que la fonction γ induit une correspondance de Galois si et seulement si pour tout élément $c \in C$, l'ensemble des approximations de c admet un meilleur minorant, lui-même élément de l'ensemble C. Ce plus petit élément sera alors noté $\alpha(c)$. La paire (α, γ) est alors la correspondance de Galois induite par la fonction γ.

On notera alors $(C, \sqsubseteq_C) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (A, \sqsubseteq_A)$.

Question 3.1 (caractérisation des correspondances de Galois)**.** *Soit $(C, \sqsubseteq_C) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (A, \sqsubseteq_A)$ une correspondance de Galois. Montrer que pour tout élément $c \in C$ et $a \in A$, on a : $\alpha(c) \sqsubseteq_A a$ si et seulement si $c \sqsubseteq_C \gamma(a)$.*

Soit $(C, \sqsubseteq_C) \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} (A, \sqsubseteq_A)$ une correspondance de Galois.

1. On suppose que $\alpha(c) \sqsubseteq_A a$.
   Par définition, $\alpha(c)$ est une approximation de c, donc $c \sqsubseteq_C \gamma(\alpha(c))$.

   Or, par Déf. 3.1, la fonction γ est croissante.
   Comme $\alpha(c) \sqsubseteq_A a$, par Déf. 2.1, on obtient : $\gamma(\alpha(c)) \sqsubseteq_C \gamma(a)$.

   Ainsi, par Déf. 1.1.(3), on conclut que $c \sqsubseteq_C \gamma(a)$.

2. On suppose que $c \sqsubseteq_C \gamma(a)$.
   Donc l'élément a est une approximation de l'élément c.
   Or $\alpha(c)$ est le meilleur minorant de l'ensemble des approximations de c.
   Par Déf. 1.3.(1), on déduit que $\alpha(c) \sqsubseteq_C a$.

Question 3.2 (propriétés usuelles)**.** *Soit $(C, \sqsubseteq_C) \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} (A, \sqsubseteq_A)$ une correspondance de Galois. Soient x, x' deux éléments de l'ensemble $(C, \sqsubseteq_C)$ tels que $x \sqsubseteq_C x'$ et y un élément de l'ensemble $(A, \sqsubseteq_A)$. Soit X une partie de C ayant un meilleur majorant.*

Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiés :

1. $x \sqsubseteq_C \gamma(\alpha(x))$ *;*
2. $\alpha(\gamma(y)) \sqsubseteq_A y$ *;*
3. $\alpha(x) \sqsubseteq_A \alpha(x')$ *;*
4. $\alpha(\gamma(\alpha(x))) = x$ *;*
5. $\gamma(\alpha(\gamma(y))) = y$ *;*
6. *l'ensemble $\{\alpha(x) \mid x \in X\}$ a un meilleur majorant et celui-ci est égal à $\alpha(\bigsqcup_{\sqsubseteq_C} X)$.*

Soit $(C, \sqsubseteq_C) \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} (A, \sqsubseteq_A)$ une correspondance de Galois.

1. Soit x un élément de l'ensemble C.
   Par Déf. 1.1.(1), on a : $\alpha(x) \sqsubseteq_A \alpha(x)$.
   En appliquant l'équivalence de la question 3.1 dans le sens direct en remplaçant y par $\alpha(x)$, on obtient : $x \sqsubseteq_C \gamma(\alpha(x))$.
2. Soit y un élément de l'ensemble A.
   Par Déf. 1.1.(1), on a : $\gamma(y) \sqsubseteq_C \gamma(y)$.
   En appliquant l'équivalence de la question 3.1 dans le sens indirect en remplaçant x par $\gamma(y)$, on obtient : $\alpha(\gamma(y)) \sqsubseteq_A y$.
3. Soient $x, x' \in C$ tel que $x \sqsubseteq_C x'$.
   On a : $x \sqsubseteq_C x'$ et par Question 3.2.(1), $x' \sqsubseteq_C \gamma(\alpha(x'))$.
   Donc par Déf. 1.1.(3), $x \sqsubseteq_C \gamma(\alpha(x'))$.
   Puis appliquant l'équivalence de la question 3.1 dans le sens indirect, on obtient : $\alpha(x) \sqsubseteq_C \alpha(x')$.
4. Soit $x \in C$.
   Par Question 3.2.(1) et Question 3.2.(3), on a : $\alpha(x) \sqsubseteq_A \alpha(\gamma(\alpha(x)))$.
   Par Question 3.2.(2) (appliqué en remplaçant y par $\alpha(x)$), on a : $\alpha(\gamma(\alpha(x))) \sqsubseteq_A \alpha(x)$.
   Donc par Déf. 1.1.(2), on conclut que : $\alpha(\gamma(\alpha(x))) = \alpha(x)$.
5. Soit $y \in A$.
   Par Question 3.2.(2) et par Déf. 3.1, on a : $\gamma(\alpha(\gamma(y))) \sqsubseteq_C \gamma(y)$.
   Par Question 3.2.(1) (appliqué en remplaçant x par $\gamma(y)$), on a : $\gamma(y) \sqsubseteq_C \gamma(\alpha(\gamma(y))) \sqsubseteq_C \gamma(y)$.

Donc par Déf. 1.1.(2), on conclut que : $\gamma(\alpha(\gamma(y))) = y$.

6. Soit X une partie de C ayant un meilleur majorant.
   Montrons que $\alpha(\bigsqcup_{\sqsubseteq_C} X)$ est un meilleur majorant de l'ensemble $\{\alpha(x) \mid x \in X\}$.
   (a) Pour $x \in X$, on a, par Déf. 1, $x \sqsubseteq_C \bigsqcup_{\sqsubseteq_C}(X)$.
   Par Question 3.2.(3), on a : $\alpha(x) \sqsubseteq_A \alpha(\bigsqcup_{\sqsubseteq_C}(X))$.
   (b) Soit $z \in A$ tel que pour tout élément $x \in X$, on ait : $\alpha(x) \sqsubseteq_A z$.
   Par Question 3.1 (sens direct) on a pour tout élément $x \in X$, $x \sqsubseteq_C \gamma(z)$.
   Par Déf. 1.2.(2), on a : $\bigsqcup_{\sqsubseteq_C} X \sqsubseteq_C \gamma(z)$.
   Par Question 3.1 (sens indirect), on conclut que $\alpha(\bigsqcup_{\sqsubseteq_C} X) \sqsubseteq_A z$

   Ainsi, par Déf. 1.2, l'ensemble $\{\alpha(x) \mid x \in X\}$ admet un meilleur majorant et $\bigsqcup_{\sqsubseteq_A}\{\alpha(x) \mid x \in X\} = \alpha(\bigsqcup_{\sqsubseteq_C} X)$.

4 Ensemble de traces finies

Dans la suite de l'épreuve, on supposera fixés deux ensembles $\mathcal{Q}$ et Σ. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{Q}$ sont appelés états, ceux de l'ensemble Σ sont appelés étiquettes de transition.

Définition 4.1 (traces)**.** *Une trace de taille* 0 *est un état (dans l'ensemble* $\mathcal{Q}$*). Pour* $n > 0$*, une trace de taille* n *est un* n*-uplet* $(q_i, \lambda_i, q'_i)_{0 \leq i < n} \in (\mathcal{Q} \times \Sigma \times \mathcal{Q})^n$ *qui vérifie la propriété* $q'_i = q_{i+1}$ *pour tout entier* i *compris entre* 0 *et* $n-2$ *(dans ce cas, l'état* q'_{n-1} *sera aussi noté* q_n*).*

Une telle trace τ *sera notée* $q_0 \overset{\lambda_0}{\to} \ldots \overset{\lambda_{n-1}}{\to} q_n$*. L'état* q_0 *est appelé l'état initial de la trace* τ *et sera noté* i_τ*. L'état* q_n *est appelé l'état final de la trace* τ *et sera noté* f_τ*. On note aussi* all_τ *l'ensemble des états* $\{q_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ *et* $trans_\tau$ *l'ensemble des transitions* $\{(q_i, \lambda_i, q_{i+1}) \mid 0 \leq i < n\}$*. Dans le cas d'une trace de taille* 0*, l'unique état est à la fois l'état initial et l'état final et l'ensemble des transitions de la trace est vide.*

On note $\mathcal{T}$ *l'ensemble de toutes les traces.*

Deux traces τ *et* τ' *de tailles respectives* n *et* n' *tels que l'état final* f_τ *de la trace* τ *soit aussi l'état initial* $i_{\tau'}$ *de la trace* τ'*, se composent pour former la trace* $(q''_i, \lambda''_i, q''_{i+1})_{0 \leq i < n+n'}$ *qui est définie par* $q''_i = q_i$ *et* $\lambda''_i = \lambda_i$ *pour tout entier* $i < n$ *et* $q''_i = q_{i-n}$ *et* $\lambda''_i = \lambda_{i-n}$ *pour tout entier* i *compris entre* n *et* $n + n' - 1$*. Cette trace est alors notée* $\tau.\tau'$*.*

Lorsqu'une trace τ *peut s'écrire sous la forme* $\tau'.\tau''$*, on dit que la trace* τ' *est un préfixe de* τ*.*

Définition 4.2 (systèmes de transitions)**.** *Un système de transitions est un triplet* (I, S, T) *avec* $I, S \subseteq \mathcal{Q}$ *et* $T \subseteq S \times \Sigma \times S$*.*

On note $(\mathbb{T}, \sqsubseteq_{\mathbb{T}})$ *l'ensemble des systèmes de transitions ordonné par l'inclusion ensembliste appliquée composante par composante.*

Définition 4.3 (trace reconnue par un système de transitions)**.** *Soit* τ *une trace et* (I, S, T) *un système de transition.*

On dit que la trace τ *est reconnue par le système de transitions* (I, S, T) *si et seulement si* $i_\tau \in I$ *et* $trans_\tau \subseteq T$*.*

Question 4.1. *Montrer que la fonction* $\gamma_{\mathbb{T}}$ *qui associe à chaque système de transitions l'ensemble des traces qu'il reconnait est une fonction de concrétisation.*

Par Déf. 3.1, comme $(\wp(\mathcal{T}), \subseteq)$ et $(\mathbb{T}, \sqsubseteq_{\mathbb{T}})$ sont des ordres partiels, il suffit de montrer que la fonction $\gamma_{\mathbb{T}}$ est croissante.

Soite (I, S, T) et (I', S', T') deux systèmes de transition tels que $I \subseteq I'$, $S \subseteq S'$, et $T \subseteq T'$.

Soit τ une trace reconnue par le système de transition (I, S, T).

Par Déf. 4.3, on a $i_\tau \in I$ et $trans_\tau \subseteq T$. D'où $i_\tau \in I'$ et $trans_\tau \subseteq T'$. Ainsi, par Déf. 4.3, τ une trace reconnue par le système de transition (I', S', T'). Ainsi la fonction $\gamma_{\mathbb{T}}$ est croissante. C'est donc bien une fonction de concrétisation.

Question 4.2. *Proposer une fonction $\alpha_{\mathbb{T}}$ de qui associe à chaque ensemble de traces un système de transitions de sortes que $(\wp(\mathcal{T}), \subseteq) \underset{\alpha_{\mathbb{T}}}{\overset{\gamma_{\mathbb{T}}}{\leftrightarrows}} (\mathbb{T}, \sqsubseteq_{\mathbb{T}})$ soit une correspondance de Galois.*

On prend $\alpha_{\mathbb{T}}$ la fonction qui a un ensemble de trace $X \subseteq \mathcal{T}$ associe le triplet $(I, S, T) \in \mathbb{T}$ qui est défini ci-dessous :

— $I = \{i_\tau \mid \tau \in X\}$;
— $S = \{all_\tau \mid \tau \in X\}$;
— $T = \{trans_\tau \mid \tau \in X\}$.

Soit $q \in I$, il existe une trace $\tau \in X$ telle que $q = i_\tau$, puis $q \in all_\tau$, ce qui implique que $q \in S$.

Soit $(q, \lambda, q') \in T$, d'une part, on a : $\lambda \in \Sigma$, d'autre part, il existe une trace $\tau \in X$ telle que $(q, \lambda, q') \in trans_\tau$, puis $\{q, q'\} \subseteq all_\tau$, ce qui implique que $(q, \lambda, q') \in S \times \Sigma \times S$.

Ainsi, d'après Déf. 4.2, la fonction $\alpha_{\mathbb{T}}$ est bien définie.

On montre maintenant que pour tout ensemble de traces $X \subseteq \mathcal{T}$, $\alpha_{\mathbb{T}}(X)$ est une approximation de X, et que parmi les approximation de X, c'est la plus petite pour l'ordre $\sqsubseteq_{\mathbb{T}}$.

On note $(I, S, T) = \alpha_{\mathbb{T}}(X)$.

1. Soit τ une trace dans l'ensemble X.
   Par définition de $\alpha_{\mathbb{T}}$, on a : $i_\tau \in I$ et $trans_\tau \in T$.
   Donc par définition de Déf. 4.3, on a : $\tau \in \gamma(I, S, T)$.
   Par Déf. 3.2, le système de transition (I, S, T) est une approximation de l'ensemble de trace X.
2. Soit (I', S', T') une approximation de l'ensemble de trace X.
   Par Déf. 3.2, on a : $X \subseteq \gamma(I', S', T')$.
   Par Question 4.1, toute trace τ de l'ensemble X est reconnue par le système de transitions (I', S', T').
   (a) Soit $q \in I$. Par définition, il existe une trace $\tau \in X$ telle que $i_\tau = q$. Comme la trace τ est reconnue par le système de transitions (I', S', T'), on déduit que $q \in I'$.
   Ainsi $I \subseteq I'$.
   (b) Soit $q \in S$. Par définition, il existe une trace $\tau \in X$ telle que $q \in all_\tau$. La trace τ est reconnue par le système de transitions (I', S', T').
      i. On suppose que $q \in i_\tau$.
      Par Déf. 4.3, on a $q \in I'$. Puis par Déf 4.2, $I' \subseteq S'$. Donc $q \in S'$
      ii. On suppose que $q \notin i_\tau$.
      Il existe donc une transition $t \in trans_\tau$ telle que la troisième composante de la transition t soit l'état q.
      Par Déf. 4.3, on a $t \in T'$. Puis par Déf 4.2, $q \in S'$.
   Ainsi $S \subseteq S'$.
   (c) Soit $t \in T$. Par définition, il existe une trace $\tau \in X$ telle que $t \in trans_\tau$. Comme la trace τ est reconnue par le système de transitions (I', S', T'), on déduit que $t \in T'$.
   Ainsi $T \subseteq T'$.

   Par Déf. 4.2, on a : $(I, S, T) \sqsubseteq_{\mathbb{T}} (I', S', T')$.

Question 4.3. *Donner un ensemble de traces, stable par préfixes (i.e. tout préfixe de trace de cet ensemble est une aussi une trace de cet ensemble) qui n'est pas invariant pour l'opérateur de clôture $\gamma_{\mathbb{T}} \circ \alpha_{\mathbb{T}}$.*

On considère l'ensemble de traces X qui contient exactement deux traces, la trace de taille 0, 1 et la trace $1 \stackrel{a}{\to} 1\}$. Cet ensemble est bien stable par préfixes.

On note $(I, S, T) = \alpha(X)$.

On note τ la trace $1 \stackrel{a}{\to} 1\}$.

Comme 1 est l'état initial de τ, par Déf. 4.3, on a : $1 \in I$ et $1 \in S$

Comme $(1, a, 1)$ est une transition de τ, par Déf. 4.3, on a : $(1, a, 1) \in T$.

Ainsi, par Déf. 4.3, la trace $1 \stackrel{a}{\to} 1 \stackrel{a}{\to} 1$ est aussi reconnue par le système de transition (I, S, T).

Donc, par Question 4.1, la trace $1 \stackrel{a}{\to} 1 \stackrel{a}{\to} 1$ est élément de l'ensemble $\gamma(I, S, T)$.

Ainsi $\gamma(\alpha(I, S, T)) \neq (I, S, T)$.

Question 4.4. *Donner un système de transition qui n'est pas invariant pour l'opérateur de clôture $\alpha_{\mathbb{T}} \circ \gamma_{\mathbb{T}}$.*

On considère le système de transition $(\emptyset, \{1\}, \emptyset)$.

Par Question 4.1 et Déf. 4.3, pour tout $\tau \in \gamma(\emptyset, \{1\}, \emptyset)$, on a : $i_\tau \in \emptyset$.

Ainsi $\gamma(\emptyset, \{1\}, \emptyset) = \emptyset$.

Or $\emptyset \subseteq \gamma(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

Donc par Question 3.1, dans le sens indirect, on a : $\alpha(\emptyset) \sqsubseteq_{\mathbb{T}} (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

Donc $\alpha(\gamma(\emptyset, \{1\}, \emptyset)) \sqsubseteq_{\mathbb{T}} (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

Puis $\alpha(\gamma(\emptyset, \{1\}, \emptyset)) \neq (\emptyset, \{1\}, \emptyset)$.

5 Plus petits points fixes dans un treillis complet

Définition 5.1 (point-fixe)**.** *Soit X un ensemble. Soit $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. On appelle point fixe de la fonction $\mathbb{F}$ tout élément $x \in X$ tel $f(x) = x$. On note fp $\mathbb{F}$ l'ensemble des points fixes de la fonction $\mathbb{F}$.*

Définition 5.2. *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. On appelle plus petit point fixe de la fonction $\mathbb{F}$ tout élément $x \in fp\ \mathbb{F}$ tel que $x \sqsubseteq_X y$ pour tout élément $y \in fp\ \mathbb{F}$.*

Question 5.1. *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. Montrer que $\mathbb{F}$ admet au plus un plus petit point fixe. Quand il existe, le plus petit point fixe de $\mathbb{F}$ sera noté lfp $\mathbb{F}$.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un ordre partiel. Soit $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même.

Soient x, y deux plus petits points fixes de la fonction $\mathbb{F}$.

L'élément x est un plus petit point fixe de la fonction $\mathbb{F}$. Par Déf. 5.2, on a : $x \in fp\ (\mathbb{F})$. L'élément y est un plus petit point fixe de la fonction $\mathbb{F}$. Par Déf. 5.2, on a : $y \sqsubseteq_X x$.

De même, en remplaçant simultanément y par x et x par y, on obtient $x \sqsubseteq_X y$.

Par Déf. 1.1.(2), on conclut que $x = y$.

Question 5.2 (théorème de Tarski)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction croissante de l'ensemble X dans lui-même.*

Montrer que la fonction $\mathbb{F}$ admet un plus petit point fixe et que lfp $\mathbb{F} = \bigsqcap_{\sqsubseteq_X} \{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$.

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction croissante de l'ensemble X dans lui-même.

Par Question 1.7, l'ensemble $\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$ admet une meilleure borne inférieure. On montre que $\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$ est un point fixe de la fonction $\mathbb{F}$ plus petit que tous les autres.

1. On montre que $\mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} \{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}) = \bigsqcap_{\sqsubseteq_X} \{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$.

   (a) Soit $x \in X$ tel que $\mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x$.
   Par Déf. 1.3.(1), on a : $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X} \{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\} \sqsubseteq_X x$.

Comme f est croissante, on a, par Déf. 2.1, $\mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}) \sqsubseteq_X \mathbb{F}(x)$.
Par Déf. 1.1.(3), on déduit que : $\mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}) \sqsubseteq_X x$.
Par Déf. 1.3.(2), on conclut que : $\mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}) \sqsubseteq_X \bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$.

(b) On a vu que $\mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}) \sqsubseteq_X \bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$.
Comme $\mathbb{F}$ est croissante, par Déf. 2.1, on a : $\mathbb{F}(\mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\})) \sqsubseteq_X \mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\})$.
Donc $\mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}) \in \{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$.
Par Déf. 1.3.(1), on conclut que : $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\} \sqsubseteq_X \mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\})$.

Par Déf. 1.1.(2), on a : $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\} = \mathbb{F}(\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\})$.

2. Soit $x \in \mathit{fp}\,(\mathbb{F})$.
On a $x = \mathbb{F}(x)$.
Donc, par Déf. 1.1.(1), $\mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x$.
Ainsi $x \in \{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\}$.
Par Déf. 1.3.(1), on conclut que : $\bigsqcap_{\sqsubseteq_X}\{x \in X \mid \mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X x\} \sqsubseteq_X x$.

Définition 5.3 (fonctions continues)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même. On dira que la fonction $\mathbb{F}$ est continue si et seulement si, pour toute partie A de l'ensemble X, on a $f(\bigsqcup_{\sqsubseteq_X} A) = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{f(a) \mid a \in A\}$.*

Question 5.3. *Montrer que toute fonction continue est croissante.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction de l'ensemble X dans lui-même.
Soient $x, y \in X$ tels que $x \sqsubseteq_X y$.
Par Déf. 1.6, l'ensemble $\{x, y\}$ admet une meilleure borne supérieure.
On a $x \sqsubseteq_X y$ et par Déf. 1.1.(3) $y \sqsubseteq_X y$.
Par Déf. 1.2.(2), on a : $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{x, y\} \sqsubseteq_X y$.
Comme $y \in \{x, y\}$, on a, par Déf. 1.2.(1), $y \sqsubseteq_X \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{x, y\}$.
Donc par Déf. 1.1.(2), on a $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{x, y\} = y$.
Puis par Déf. 5.3, on a $\mathbb{F}(\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{x, y\}) = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}(x), \mathbb{F}(y)\}$.
Ainsi, comme $\mathbb{F}(x) \in \{\mathbb{F}(x), \mathbb{F}(y)\}$ et par Déf. 1.2.1, on conclut que $\mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X \mathbb{F}(y)$.
Ainsi la fonction $\mathbb{F}$ est croissante.

Question 5.4 (théorème de Kleene)**.** *Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble X dans lui-même. Montrer que le plus petit point fixe de $\mathbb{F}$ est égal à l'élément $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Soit $(X, \sqsubseteq_X)$ un treillis complet et $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble X dans lui-même.
Par Question 5.3, la fonction $\mathbb{F}$ est croissante.
Par Question 5.2, la fonction $\mathbb{F}$ admet un plus petit point fixe.
Montrons que $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un plus petit point fixe de la fonction $\mathbb{F}$.

1. Par Déf. 5.3, on a : $\mathbb{F}(\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}(\mathbb{F}^n(\perp_{\sqsubseteq_X})) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
D'où $\mathbb{F}(\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^{n+1}(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Par Question 1.5, $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^{n+1}(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\perp_{\sqsubseteq_X}\} \cup \{\mathbb{F}^{n+1}(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Puis, puisque $\mathbb{F}^0(\perp_{\sqsubseteq_X}) = \perp_{\sqsubseteq_X}$, on obtient :
$\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\perp_{\sqsubseteq_X}\} \cup \{\mathbb{F}^{n+1}(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\perp_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ainsi : $\mathbb{F}(\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\bot_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\bot_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. L'élément $\bot_{\sqsubseteq_X}$ est plus petit que tous les éléments de X et par définition $\mathbb{F}^0(\bot_{\sqsubseteq_X}) = \bot_{\sqsubseteq_X}$. Donc $\mathbb{F}^0(\bot_{\sqsubseteq_X}) \sqsubseteq_X \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.

   Soit $x \in X$ tel que $x \sqsubseteq_X \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.
   Comme la fonction $\mathbb{F}$ est croissante, par Déf. 2.1, on déduit que : $\mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X \mathbb{F}(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})$.
   Par Défs. 5.2 et 5.1, on a : $\mathbb{F}(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.
   Ainsi $\mathbb{F}(x) \sqsubseteq_X \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.

   Par induction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{F}^n(\bot_{\sqsubseteq_X}) \sqsubseteq_X \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.
   Par Déf. 1.2.(2), on a : $\bigsqcup_{\sqsubseteq_X}\{\mathbb{F}^n(\bot_{\sqsubseteq_X}) \mid n \in \mathbb{N}\} \sqsubseteq_X \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.

6 Approximations d'ensembles de traces définis inductivement

On considère une partie $\mathcal{Q}_0$ de $\mathcal{Q}$ et une fonction $\textsc{cont}$ de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{T}$ telle que pour tout état $q \in \mathcal{Q}$ et toute trace τ dans l'ensemble $\textsc{cont}(q)$, on ait $i_\tau(\tau) = q$.

On définit la fonction $\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ de l'ensemble $\wp(\mathcal{T})$ vers lui même, qui a tout ensemble de traces X associe l'ensemble de trace $\mathcal{Q}_0 \cup \{\tau.\tau' \mid \tau \in X, \tau' \in \textsc{cont}(f_\tau(\tau))\}$.

Question 6.1. *Montrer que la fonction $\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ admet un plus petit point fixe et que ce plus petit point fixe est égal à l'ensemble $\bigcup\{\mathbb{F}^n_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}(\emptyset)\}$.*

D'après Question 5.4, il suffit de montrer que la fonction $\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ est continue.
Soit A un ensemble d'ensembles de traces.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(\bigcup(A)) &= \mathcal{Q}_0 \cup \{\tau.\tau' \mid \tau \in \bigcup A, \tau' \in \textsc{cont}(f_\tau(\tau))\}\\
\mathbb{F}(\bigcup(A)) &= \mathcal{Q}_0 \cup \bigcup\{\{\tau.\tau' \mid \tau \in X, \tau' \in \textsc{cont}(f_\tau(\tau))\} \mid X \in A\}\\
\mathbb{F}(\bigcup(A)) &= \bigcup\{\mathcal{Q}_0 \cup \{\tau.\tau' \mid \tau \in X, \tau' \in \textsc{cont}(f_\tau(\tau))\} \mid X \in A\}
\end{aligned}$$

On définit la fonction $\mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ de l'ensemble $\mathbb{T}$ dans lui même, qui a tout système de transitions (I, S, T) associe le système de transitions (I', S', T') où :
- $I = I \cup \mathcal{Q}_0$;
- $S = I \cup \{\bigcup \mathit{all}_\tau \mid \tau \in \bigcup\{\textsc{cont}(q) \mid q \in S\}\}$;
- $T = \bigcup\{\mathit{trans}_\tau \mid \tau \in \bigcup\{\textsc{cont}(q) \mid q \in S\}\}$.

Question 6.2. *Montrer que pour tout élément $x \in C$ et pour tout élément $y \in A$, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $[\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}](y)$;
2. *si les ensembles $\mathcal{Q}$ et Σ admettent au moins un élément chacun, il existe un élément y_c in A tel que* $[\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \gamma](y) \neq [\mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}](y)$;
3. $[\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \gamma \circ \alpha](x) = [\mathbb{F}^\sharp_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \circ \alpha](y)$.

1. TODO
2. On suppose que $\mathcal{Q}$ ait au moins un élément, que l'on note 1 et que Σ ait au moins un élément, que l'on note a.
   On définit le système de transitions $(\emptyset, \emptyset, \{1, a, 1\})$.

On a :

$$\begin{array}{l}[\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\text{CONT}} \circ \gamma](\emptyset, \emptyset, \{1, a, 1\}) = \alpha(\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\text{CONT}}(\gamma(\emptyset, \emptyset, \{1, a, 1\}))) \\ [\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\text{CONT}} \circ \gamma](\emptyset, \emptyset, \{1, a, 1\}) = \alpha(\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\text{CONT}}(\emptyset)) \\ [\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\text{CONT}} \circ \gamma](\emptyset, \emptyset, \{1, a, 1\}) = \alpha(\mathcal{Q}_0) \\ [\alpha \circ \mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\text{CONT}} \circ \gamma](\emptyset, \emptyset, \{1, a, 1\}) = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_0, \emptyset).\end{array}$$

3. TODO

Question 6.3. *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soient $\mathbb{F}$ une fonction croissante de l'ensemble C dans lui-même et $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A dans lui-même telles que : pour tout élément $y \in A$, on ait : $[\mathbb{F} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp](y)$.*

Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\sharp$ admettent des plus petits points fixes. Montrer que $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \sqsubseteq_C \mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp$.

Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soient $\mathbb{F}$ une fonction croissante de l'ensemble C dans lui-même et $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A dans lui-même telles que : pour tout élément $y \in A$, on ait : $[\mathbb{F} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp](y)$.

Les fonctions $\mathbb{F}$ and $\mathbb{F}^\sharp$ sont des fonctins croissantes dans des treillis complets. Par Question 5.2, ces fonctions ont chacunes un plus petit point fixe.

On a :

$$\begin{array}{ll}\mathbb{F}(\gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)) = \gamma(\mathbb{F}^\sharp(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)) & (\text{correction de } \mathbb{F}^\sharp) \\ \mathbb{F}(\gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)) \sqsubseteq_C \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp) & (\text{Déf. } 5.2).\end{array}$$

Par Question. 5.2 et Déf. 1.3.(1), on a : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \sqsubseteq_C \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)$.

Question 6.4. *Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soient $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble C dans lui-même et $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A dans lui-même.*

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

1. *pour tout élément $y \in A$, on ait : $[\mathbb{F} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp](y)$;*
2. *$\mathbb{F}^\sharp \circ \alpha = \alpha \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha$.*

Montrer que : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} = \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)$ si et seulement si $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$.

Astuce 6.1. *Pour prouver le sens indirect de l'équivalence, on commencera par prouver que $\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp$.*

Soient $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soient $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble C dans lui-même et $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A dans lui-même.

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

1. pour tout élément $y \in A$, on ait : $[\mathbb{F} \circ \gamma](y) \subseteq [\gamma \circ \mathbb{F}^\sharp](y)$;
2. $\mathbb{F}^\sharp \circ \alpha = \alpha \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha$.

On prouve l'équivalence par double implication :

1. On suppose que $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} = \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)$.
   On a $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$.
2. On suppose que $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$
   On a, par Question 3.2.(5), $\gamma(\alpha(\gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}))) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.
   Montrons que $\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp$.
   (a) Par Question 6.3, $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}$ et $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp$ sont bien définis.
   Par Question 6.3, on a : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \sqsubseteq_C \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)$.
   Par Question 3.1 (sens indirect), on a : $\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) \sqsubseteq_A \mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^\sharp(\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})) &= \alpha(\mathbb{F}(\gamma(\alpha(\mathit{lfp}\,(\mathbb{F}))))) \\
\mathbb{F}^\sharp(\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})) &= \alpha(\mathbb{F}(\mathit{lfp}\,(\mathbb{F}))) \\
\mathbb{F}^\sharp(\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})) &= \alpha(\mathit{lfp}\,(\mathbb{F})) \qquad \text{(Déf. 5.2.(5.1))}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})$ est un point fixe de $\mathbb{F}^\sharp$.

Par Déf. 5.2, on obtient que $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp \sqsubseteq_A \alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})$.

Par Déf. 1.1.(2), on conclut que : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp = \alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})$.

Par Déf. 3.1, on a : $\gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp) = \gamma(\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}))$.

Puis, comme $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$ et par Déf. 3.2.(5), on conclut que $\gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.

Question 6.5. *Donner un critère syntaxique sur la fonction* CONT *pour que la fonction $\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ satisfasse la contrainte $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}} \in \{\gamma_{\mathbb{T}}(y) \mid y \in \mathbb{T}\}$.*

Il suffit que la fonction CONT ne puisse ajouter qu'une transition à la fois.

On suppose que pour tout état $q \in \mathcal{Q}$, l'ensemble $\textsc{cont}(q)$ ne contient que des traces de taille 1.

On montre alors que l'ensemble $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}_{\mathcal{Q}_0,\textsc{cont}}$ est exactement l'ensemble des traces reconnues par le système de transitions $(\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}, \{(q,\lambda,q') \in \mathcal{Q} \times \Sigma \times \mathcal{Q} \mid (q,\lambda,q') \in \textsc{cont}(q)\})$.

1. TODO
2. TODO

Question 6.6. *Conclure.*

L'analyse calcule une représentation exacte de l'ensemble des traces lorsque l'ensemble des traces est sans-mémoire. Une condition suffisante pour cela consiste à imposer que la fonction CONT ajoute les transitions une par une.

7 Transitions qui commutent

Dans cette partie, on suppose que pour toute transition, l'état avant cette transition et l'étiquette de cette transition caractérise entièrement l'état que l'on atteint après l'exécution de cette transition. En conséquence, on suppose que l'on dispose d'une fonction f qui associe à chaque paire $(q,\lambda) \in \mathcal{Q} \times \Sigma$ un élément de l'ensemble $\mathcal{Q}$ telle que toutes les traces sont de la forme $(q_i, \lambda_i, f(q_i, \lambda_i))$. On suppose également que pour tout état $q \in \mathcal{Q}$, $\lambda, \lambda' \in \Sigma$, on ait : $f(f(q,\lambda),\lambda') = f(f(q,\lambda'),\lambda)$.

Exemple 7.1. *On considère les traces suivantes :*

1. $\tau_1 = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{d} 6$;
2. $\tau_2 = 1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{d} 6$;
3. $\tau_3 = 1 \xrightarrow{d} 7 \xrightarrow{c} 8 \xrightarrow{a} 9 \xrightarrow{b} 11$;
4. $\tau_4 = 1 \xrightarrow{d} 7 \xrightarrow{c} 8 \xrightarrow{b} 10 \xrightarrow{a} 11$.

Intuitivement, dans une trace de l'ensemble $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$, si on permute deux transitions consécutives étiquetées a et b (ou inversement), quitte à changer l'état intermédiaire, on obtient encore une trace de l'ensemble $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$. On dit alors que les transitions étiquetées a commutent avec celles étiquetées b. Ce n'est pas le cas des transitions étiquetées c et d.

Question 7.1. *Soient X un ensemble de traces et $\lambda, \lambda' \in \Sigma$ deux étiquettes de transitions. Donner une définition formelle pour déterminer si les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces X.*

On s'assurera qu'étant donné une famille d'ensemble de traces $(X_i)_{i \in I}$ et deux étiquettes de transitions $\lambda, \lambda' \in \Sigma$, telles que pour tout indice $i \in I$, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces X_i, alors les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.

Soient X un ensemble de traces et $\lambda, \lambda' \in \Sigma$ deux étiquettes de transitions.

1. On dira que les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de trace X si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfiates :
   (a) pour toute trace de la forme $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ dans l'ensemble X, la trace $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ appartient également à l'ensemble X ;
   (b) pour toute trace de la forme $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ dans l'ensemble X, la trace $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ appartient également à l'ensemble X.

2. Soit λ et λ' deux étiquettes de transitions dans l'ensemble Σ.
   Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles de traces telle que pour tout $i \in I$ les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble X_i.
   On montre que les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.
   (a) On suppose que l'ensemble I est vide.
   On a donc $\bigcap\{X_i \mid i \in I\} = \mathcal{T}$.
      i. Soit $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ une trace.
      On sait que $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, f(f(q_1, \lambda'), \lambda)).\tau'$ est aussi une trace.
      Par hypothèse, on a : $q_2 = f(f(q_1, \lambda), \lambda')$ et $f(f(q_1, \lambda'), \lambda) = f(f(q_1, \lambda), \lambda')$.
      Ainsi $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ est aussi une trace.
      ii. Soit $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ une trace.
      On sait que $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', f(f(q_1, \lambda), \lambda')).\tau'$ est aussi une trace.
      Par hypothèse, on a : $q_2 = f(f(q_1, \lambda'), \lambda)$ et $f(f(q_1, \lambda), \lambda') = f(f(q_1, \lambda'), \lambda)$.
      Ainsi $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ est aussi une trace.

   Ainsi les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble $\mathcal{T}$.
   Donc les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.
   (b) On suppose que l'ensemble I n'est pas vide.
      i. Soit une trace de la forme $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ qui appartienne à l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.
      Pour $i \in I$, la trace $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ appartient à l'ensemble X_i.
      Puis, comme les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble X_i, la trace $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ appartient également à l'ensemble X_i.
      On conclut que la trace $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ appartient également à l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.
      ii. Soit une trace de la forme $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ qui appartienne à l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.
      Pour $i \in I$, la trace $\tau.(q_1, \lambda', f(q_1, \lambda')).(f(q_1, \lambda'), \lambda, q_2).\tau'$ appartient à l'ensemble X_i.

Puis, comme les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble X_i, la trace $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ appartient également à l'ensemble X_i.

On conclut que la trace $\tau.(q_1, \lambda, f(q_1, \lambda)).(f(q_1, \lambda), \lambda', q_2).\tau'$ appartient également à l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.

Ainsi, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.

Ainsi, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble $\bigcap\{X_i \mid i \in I\}$.

Question 7.2. *Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\Sigma \times \Sigma$. Montrer qu'il existe un opérateur de clôture supérieure ρ_C qui associe à chaque ensemble de traces X, le plus petit ensemble de traces $\rho_\mathcal{C}(X)$ contenant X telles que dans l'ensemble de traces $\rho_\mathcal{C}(X)$, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.*

Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\Sigma \times \Sigma$.

On considère la fonction ρ_C qui à chaque ensemble de trace $X \in \mathcal{T}$ associe l'intersection de tous les ensembles de traces contenant X et pour lesquels les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.

Par Question 7.1, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces $\rho_C(X)$ pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.

On montre que ρ_C est un opérateur de clôture supérieur.

- Soit $X \subseteq \mathcal{T}$ un ensemble de traces.
  Par définition de ρ_C, les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces $\rho_C(X)$ pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.
  Donc $\rho_C(X)$ contient $\rho_C(X)$ et les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces $\rho_C(X)$ pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.
  Donc par définition de $\rho_C(X)$, on a : $\rho_C(\rho_C(X)) \subseteq \rho_C(X)$.
  Par ailleurs, tout ensemble contenant $\rho_C(X)$ contient $\rho_C(X)$.
  Donc $\rho_C(X) \subseteq \rho_C(\rho_C(X))$.
  Ainsi $\rho_C(X) = \rho_C(\rho_C(X)$.
- Soient $X, Y \in \wp(\mathcal{T})$ telles que $X \subseteq Y$.
  L'ensemble des ensembles de traces qui contiennent Y et pour lequels les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des ensembles de traces qui contiennent X et pour lequels les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.
  Par définition de $\rho_C(X)$ et $\rho_C(Y)$, on en déduit que $\rho_C(Y) \subseteq \rho_C(X)$.
- Soit $X \subseteq \mathcal{T}$ un ensemble de traces.
  L'ensemble $\mathcal{T}$ contient X et d'après Question 7.1, et les transitions étiquetées λ commutent avec celles étiquetées λ' dans l'ensemble de traces $\mathcal{T}$ pour toute paire d'étiquettes (λ, λ') de l'ensemble $\mathcal{C}$.

Question 7.3. *Soit $(C, \sqsubseteq_C)$ un treillis complet. Soit ρ un opérateur de clôture supérieure sur l'ensemble C. Soit $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble C vers lui-même.*

On suppose que la propriété suivante :

$$\rho(\mathit{lfp}\ \mathbb{F}) = \mathit{lfp}\ \mathbb{F}$$

est satisfaite.

Montrer que la fonction $[\rho \circ \mathbb{F}]$ admet un plus petit point fixe dans le treillis $(C, \sqsubseteq_C)$ et que $\mathit{lfp}\ \mathbb{F} = \mathit{lfp}\ [\rho \circ \mathbb{F}]$.

On montre que $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}$ est un point fixe de l'opérateur $\rho \circ \mathbb{F}$ et que ce point fixe est plus petit que n'importe quel point fixe de l'opérateur $\rho \circ \mathbb{F}$.

1. On a :
$$\begin{aligned}
[\rho \circ \mathbb{F}](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) &= \rho(\mathbb{F}(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})) \\
[\rho \circ \mathbb{F}](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) &= \rho(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) \qquad \text{(Par Déf. 5.1)} \\
[\rho \circ \mathbb{F}](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) &= \mathit{lfp}\,\mathbb{F}
\end{aligned}$$
2. Soit X un point fixe de l'opérateur $\rho \circ \mathbb{F}$.
   Par Déf. 5.1, on a : $\rho(\mathbb{F}(X)) = X$.
   Par Déf. 2.2.(3), on a : $\mathbb{F}(X) \subseteq \rho(\mathbb{F}(X))$.
   Ainsi $\mathbb{F}(X) \sqsubseteq_C X$.
   Par Question 5.2, on a : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \sqsubseteq_C X$.

Ainsi par Def. 5.2, on a : $\mathit{lfp}\,[\rho \circ \mathbb{F}] = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$.

Question 7.4. *Soit $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soit ρ un opérateur de clôture supérieure sur l'ensemble C. Soit $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble $(C, \sqsubseteq_C)$ vers lui même. Soit $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A vers lui-même.*

On suppose que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. *$\rho(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$;*
2. *$[\alpha \circ \mathbb{F} \circ \gamma](y) \sqsubseteq_A \mathbb{F}^\sharp(y)$, pour tout élément $y \in A$;*
3. *$[\mathbb{F}^\sharp \circ \alpha](x) \sqsubseteq_A [\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](x)$, pour tout élément $x \in C$.*

Montrer que $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} = \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)$ si et seulement si $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$.

Soit $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ deux treillis complets. Soit ρ un opérateur de clôture supérieure sur l'ensemble C. Soit $\mathbb{F}$ une fonction continue de l'ensemble $(C, \sqsubseteq_C)$ vers lui même. Soit $\mathbb{F}^\sharp$ une fonction croissante de l'ensemble A vers lui-même.

On suppose que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\rho(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}$;
2. $[\alpha \circ \mathbb{F} \circ \gamma](y) \sqsubseteq_A \mathbb{F}^\sharp(y)$, pour tout élément $y \in A$;
3. $[\mathbb{F}^\sharp \circ \alpha](x) \sqsubseteq_A [\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](x)$, pour tout élément $x \in C$.

Les fonctions $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\sharp$ sont croissantes.
Les ordres partiels $(C, \sqsubseteq_C)$ et $(A, \sqsubseteq_A)$ sont des treillis complets.
Ainsi, par Question 5.2, les fonctions $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\sharp$ ont toutes deux des plus petits point-fixes.

1. On suppose que : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} = \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)$.
   Alors $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$.
2. On suppose que $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \in \{\gamma(y) \mid y \in A\}$.
   On montre d'abord que $\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp$.
   (a) Soit $y \in A$, on a $[\alpha \circ \mathbb{F} \circ \gamma](y) \sqsubseteq_A \mathbb{F}^\sharp(y)$.
   D'où, $\alpha(\mathbb{F}(\gamma(y))) \sqsubseteq_A \mathbb{F}^\sharp(y)$.
   Par Question. 3.1 (sens direct), on a : $\mathbb{F}(\gamma(y)) \sqsubseteq_C \gamma(\mathbb{F}^\sharp(y))$.
   Puis, par Question. 6.3, on a : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F} \sqsubseteq_C \gamma(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp)$.
   Par Question. 3.1 (sens indirect), on a : $\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) \sqsubseteq_A \mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp$.
   (b) Par hypothèse, on a : $\mathbb{F}^\sharp(\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})) \sqsubseteq_A [\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](\mathit{lfp}\,\mathbb{F})$.

Or :

$$\begin{array}{lll}
[\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \alpha(\rho(\mathbb{F}(\gamma(\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}))))) & \\
[\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \alpha(\rho(\mathbb{F}(\mathit{lfp}\,\mathbb{F}))) & \text{(par Déf. 3.2.(5))} \\
[\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \alpha(\rho(\mathbb{F}(\mathit{lfp}\,[\rho \circ \mathbb{F}]))) & \text{(par Prop. 7.3)} \\
[\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \alpha(\mathit{lfp}\,[\rho \circ \mathbb{F}]))) & \text{(par Defs. 5.2 et 5.1)} \\
[\alpha \circ \rho \circ \mathbb{F} \circ \gamma \circ \alpha](\mathit{lfp}\,\mathbb{F}) = \alpha(\mathit{lfp}\,[\mathbb{F}]))) & \text{(par Prop. 7.3)}
\end{array}$$

Ainsi, $\mathbb{F}^\sharp(\alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})) \sqsubseteq_A \alpha(\mathit{lfp}\,[\mathbb{F}])))$.

Donc par Prop. 5.2, on a : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp \sqsubseteq_A \alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})$.

Ainsi par Déf. 1.1.(2), on a : $\mathit{lfp}\,\mathbb{F}^\sharp = \alpha(\mathit{lfp}\,\mathbb{F})$.

Question 7.5. *Conclure sur notre cas d'étude.*

Toujours lorsque l'ensemble des traces est sans mémoire, il est possible d'accélérer le calcul de la représentation exacte de l'ensemble des traces en prennant une fonction de transfert qui reste en sandwich entre la meilleur abstraction de la fonction concrete et la meilleure abstraction de la composée de l'opérateur de clôture qui tient compte des transitions qui commutent et la fonction concrête, au moins sur les éléments réduit du domaine abstrait, c'est à dire, ceux qui sont dans l'image de la fonction d'abstraction.

On peut alors spécialiser la représentation interne pour représenter de manière compacte les losanges de transitions qui commuttent.