Systemes Synchrones
MPRI – cours 2.23-1 2010-2011

Examen
1 décembre 2010

L'énoncé est composé de 2 pages. Les notes de cours sont autorisés. Les réponses pourront être rédigées en français ou en anglais.

Dans le problème qui suit, on s'intéresse aux propriétés des horloges binaires périodiques pour établir des équivalences et propriétés d'échanges d'opérateurs dans des réseaux data-flow fondés sur une sémantique de Kahn. Ce type de question intervient dans l'analyse des circuits élastiques [Cortadella et al].

Mots binaires

On désigne par ibw, l'ensemble des mots binaires finis et infinis à valeur dans $\{0,1\}$. Si w est un mot binaire et $i \in I\!N$, $w[i]$ désigne l'élément d'indice i de w. Si $u, v \in ibw$, $u.v$ désigne la concaténation des deux et ϵ désigne le mot vide. Si $w \in ibw$, $\mathcal{O}_i(w)$ compte le nombre de 1 de w (fonction de cumul) et $\mathcal{I}_i(w)$ retourne l'indice du i-ième 1 de w.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathcal{I}_i(0.w) & = & 1 + \mathcal{I}_i(w) & \mathcal{O}_1(1.w) & = & 1 \\
\mathcal{I}_i(1.w) & = & 1 + \mathcal{I}_{i-1}(w) & \mathcal{O}_i(1.w) & = & 1 + \mathcal{O}_{i-1}(w) \\
\mathcal{I}_1(1.w) & = & 1 & \mathcal{O}_i(0.w) & = & \mathcal{O}_i(w)
\end{array}$$

$debit(w)$ donne le débit de w, i.e, $debit(w) = lim_{n\to\infty}(\frac{\mathcal{O}_i(m)}{i})$.

Un mot binaire infini est dit ultimement périodique lorsqu'il peut s'écrire sous la forme d'un préfixe suivi d'un motif répété infiniment, c'est-à-dire, de la forme $u.v^\omega$ où $u \in \{0,1\}^*$ et $v \in \{0,1\}^+$. Nous les noterons simplement $u(v)$. Le mot $01(01011) = 0101011...101011010...$ est un mot binaire infini de période 5 et de débit 3/5. Le débit est ici le rapport entre le nombre de 1 de la période et la longueur de la période. Dans la suite, on se limite à la manipulation de suites binaires ultimements périodiques.

Si u et v sont deux mots, u est un sous-rythme de v, noté $u \subseteq v$ lorsque pour i, $u[i] \Rightarrow v[i]$. Par exemple, $01000110101 \subseteq 11010110111$. On suppose que toutes les opérations booléennes classiques sont étendues aux suites binaires (en les appliquant point-à-point).

On rappelle la définition des opérations `on`, `when`, `merge`. Si w_1 et w_2 sont deux mots, w_1 `when` w_2 est le sous-mot de w_1 pris aux instants où la valeur de w_2 est 1; `merge` w_1 w_2 w_3 est l'opération de fusion déterministe de w_2 et w_3 suivant la valeur de w_1. w_1 `on` w_2 fait avancer w_2 au rythme de w_1. On suppose qu'ϵ est absorbant pour ces opérations.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
(1.w_1)\ \texttt{on}\ (1.w_2) & = & 1.(w_1\ \texttt{on}\ w_2) & (x.w_1)\ \texttt{when}\ (1.w_2) & = & x.(w_1\ \texttt{when}\ w_2) \\
(1.w_1)\ \texttt{on}\ (0.w_2) & = & 0.(w_1\ \texttt{on}\ w_2) & (x.w_1)\ \texttt{when}\ (0.w_2) & = & (w_1\ \texttt{when}\ w_2) \\
(0.w_1)\ \texttt{on}\ w_2 & = & 0.(w_1\ \texttt{on}\ w_2) & & & \\
& & & \texttt{merge}\ (1.w_1)\ (x.w_2)\ w_3 & = & x.(\texttt{merge}\ w_1\ w_2\ w_3) \\
& & & \texttt{merge}\ (0.w_1)\ w_2\ (x.w_3) & = & x.(\texttt{merge}\ w_1\ w_2\ w_3)
\end{array}$$

Par exemple, 001011 `on` 101 = 001001 et 001001 `when` 001011 = 101.

Question 1 Calculer le résultat des opérations suivantes. Le résultat sera mis sous la forme $u(v)$.

1. `not` 1101(110)

2. $1101(11100110)$ `on` $101(10010)$
3. $1101(110)$ `on` $1011(11110$
4. $1101(11100110)$ `when` $101(10010)$

Indiquez, sans souci d'efficacité, une méthode systématique pour calculer le résultat des opérations booléennes ($\wedge$, $\vee$ et `not`). Même question pour l'opération `on`.

Question 2 Soient $u = m_1(m_2)$ et $v = m_1'(m_2')$ de longueurs n et m.

1. Ecrire le programme Lustre (ou Lucid Synchrone) produisant la suite des valeurs de u. Sa taille est proportionnelle à n.
2. Ecrire le programme Lustre (ou Lucid Synchrone) de calcul de u `on` v. Sa taille est proportionnelle à m.

Indication: si les programmes sont écrits en Lustre, on supposera que la construction `merge` *existe.*

Question 3 Soient w_1 et w_2 deux mots ultimement périodiques. Montrer que pour tout $i \in I\!N$, $\mathcal{I}_i(w_1 \texttt{ on } w_2) = \mathcal{I}_{\mathcal{I}_i(w_2)}(w_1)$.

Question 4 Soient w_1 et w_2 deux mots ultimement périodiques. Montrer que $(w_1 \texttt{ on } w_2) \texttt{ on } w_3 = w_1 \texttt{ on } (w_2 \texttt{ on } w_3)$.

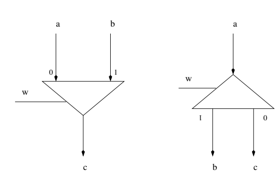
Question 5 Montrer que:

1. $w_1 \texttt{ on } w_2 \subseteq w_1$
2. $w_1 \subseteq w_2 \Leftrightarrow w \texttt{ on } w_1 \subseteq w \texttt{ on } w_2$
3. $w_1 \subseteq w_2 \Rightarrow w_1 \texttt{ on } w \subseteq w_2 \texttt{ on } w$.

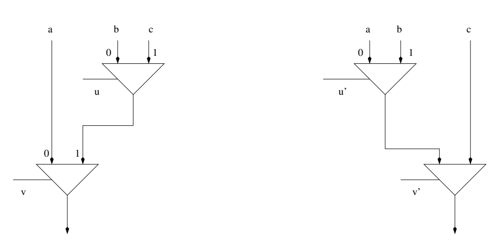
Montrer, en exhibant un contre-exemple, que la réciproque de la propriété (3) n'est pas vraie (en particulier, il existe des mots différents w_1, w_2 et un mot w tels que $w_1 \texttt{ on } w = w_2 \texttt{ on } w$).

Question 6 Montrer que si u est un sous-flot de v, i.e., $u \subseteq v$ alors $a = b \texttt{ on } a \texttt{ when } b$.

On considère maintenant des réseaux data-flow formés des deux opérateurs suivants, noté `merge` et `split` (donnés ci-dessous à gauche et à droite). On a $c = \texttt{merge } w\ a\ b$ pour le réseau de gauche et $(b, c) = \texttt{split } w\ a$ qui est un raccourci pour $b = a \texttt{ when } w$ et $c = a \texttt{ when not } w$.



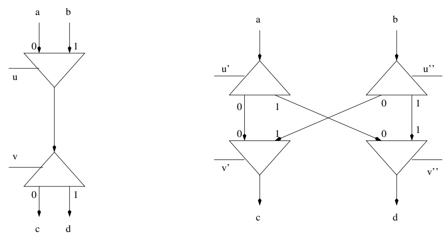
Question 7 On considère les deux réseaux suivants où u et v sont des suites binaires ultimement périodiques. L'objectif de cette question est de déterminer les expressions permettant de calculer les mots u' et v' tels que les deux réseaux soient observationnellement équivalents.



1. Calculer les valeurs de u' et v' dans les cas où $u = (01)$ et $v = (01)$ puis $u = 011(110)$ et $v = (01)$.

2. Trouver les expressions définissant u' et v' en fonction de u et de v tels que les deux réseaux soient équivalents. *Indication: les seules opérations nécessaires sont le `when` et le `on`.*

Question 8 On considère maintenant les deux réseaux ci-dessous. Le réseau de gauche modélise un canal partagé par deux processus (produisant a et b). L'autre est un double canal. L'objectif de cette question est de déterminer les valeurs de u', u'', v' et v'' de sorte que les deux réseaux soient équivalents.



1. Calculer les valeurs de u', u'', v' et v'' lorsque $u = (0101)$, $v = (0110)$. Les calculer également lorsque $u = (1010)$ et $v = (1001)$.

2. Exprimer u', u'', v' and v'' dans le cas ou $u = v$.

3. Question difficile (en plus): trouver les formules exprimant u', u'', v' et v'' en fonction de u et v en utilisant les opérations `when`, `on` et le `not`. *Indication: vous pourrez essayer d'abord des sous-cas de mots ultimement périodiques "affines" de la forme* $0^n(1\,0^m)$.