Université de Limoges
Faculté des Sciences et Techniques

Année universitaire 2014-2015

Master 1 Informatique et Mathématiques

Complexité et calculabilité - Feuille d'exercices n°5

Exercice 1. *Traduction algébrique de 3-SAT.*

1. Exprimer le « ou inclusif » logique ($\vee$) en fonction du « et » ($\wedge$) et du « ou exclusif » (XOR).

   Dans la suite, on note $+$ le XOR et $\times$ le « et ». On remarque que l'ensemble $\{0, 1\}$ muni des lois $+$ et $\times$ est un corps, noté $\mathbb{F}_2$. Dans les expressions polynomiales, il est usuel d'omettre le $\times$.

2. Montrer que la clause $\{x_1, \overline{x_2}, x_3\}$ est satisfaisable si et seulement si l'équation

$$x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 0$$

   admet une solution dans $\mathbb{F}_2^3$.

3. Montrer que toute instance du problème 3-SAT à n variables se réduit polynomialement en un problème d'existence de solutions dans $\mathbb{F}_2^n$ d'un système d'équations polynomiales en n variables à coefficients dans $\mathbb{F}_2$.

4. On considère le problème suivant :

   SYSPOL. *Étant donné n variables $x_1, \ldots, x_2$ et k polynômes $p_1, \ldots, p_k$ de $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$, existe-t-il un élément $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{F}_2^n$ tel que*

$$p_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = p_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \cdots = p_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \text{ ?}$$

   (a) Montrer que SYSPOL est dans NP.

   (b) Montrer que SYSPOL est NP-complet.

Exercice 2. *NP-complétude de «Vertex cover».* On considère le problème suivant :

VERTEX COVER (Couverture par sommets). *Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes A et t un entier plus petit que $|S|$. Existe-t-il $T \subset S$ de cardinal t tel que chaque arête de G admette au moins une extrémité dans T ?*

Autrement dit, existe-t-il $T \subset S$ tel que $|T| = t$ et $\forall(a, b) \in A$, $a \in T$ ou $b \in T$?

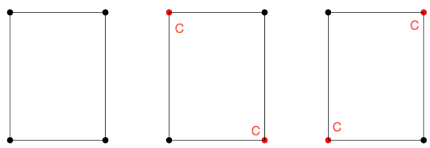

Figure 1: Un graphe et deux 2-couvertures (les sommets des couvertures sont marqués «c»).

1. On considère le graphe $G = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(2,3),(2,4)\})$. Vérifier que ce graphe admet une couverture à un sommet. Vérifier qu'il faut au moins deux sommets pour couvrir un «triangle» (graphe complet à 3 sommets).

2. Montrer que le problème **VERTEX COVER** dans NP.

3. Soit E une instance à k clauses du problème 3-SAT sur les variables booléennes $\{p_1, \ldots, p_l\}$. On note $c_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$ les clauses de E, de sorte que $x_{i,j}$ est de la forme p_n ou $\overline{p_n}$ pour un certain $n \in \{1, \ldots, l\}$. On considère alors le graphe $G_E = (S_E, A_E)$ construit comme suit:

   - S_E est formé de:
     - $2l$ sommets étiquetés p_n et $\overline{p_n}$ pour $n \in \{1, \ldots, l\}$,
     - $3k$ sommets étiquetés $x_{i,1}$, $x_{i,2}$ et $x_{i,3}$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$.
   - A_E est composé de:
     - pour tout $n \in \{1, \ldots, l\}$, d'une arête connectant le sommet d'étiquette p_n à celui d'étiquette $\overline{p_n}$,
     - pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, des arêtes $(x_{i,1}, x_{i,2})$, $(x_{i,2}, x_{i,3})$ et $(x_{i,3}, x_{i,1})$ (en d'autres termes, de k «triangles»),
     - pour chaque $x_{i,j}$, d'une arête de la forme $(x_{i,j}, p_n)$ ou $(x_{i,j}, \overline{p_n})$ selon que $x_{i,j}$ représente p_n ou $\overline{p_n}$.

   (a) Construire ce graphe pour $E = \{(p_1, \overline{p_2}, p_3), (p_2, \overline{p_3}, \overline{p_4})\}$.

   (b) Montrer que la construction de G_E peut se faire en un temps polynomial en la taille de E.

4. Supposons que l'instance E soit satisfaisable. Dans ce cas, il existe une affectation des variables telle que toutes les clauses soient satisfaites et l'on note $I(p_n)$ la valeur de p_n correspondante.

   Soit T un ensemble de sommets contenant:

   - les sommets d'étiquette p_n tel que $I(p_n) = 1$,
   - les sommets d'étiquette $\overline{p_n}$ tel que $I(p_n) = 0$,
   - pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, deux sommets d'étiquettes $x_{i,1}, x_{i,2}$ ou $x_{i,3}$ tels que I prenne la valeur 1 pour le littéral restant. On remarque que si E est satisfaite par cette affectation, au moins un des $I(x_{i,j})$ vaut 1 et cette construction est possible.

   (a) Construire un tel T pour l'exemple de la question précédente.

   (b) Montrer que T est une couverture à $l + 2k$ sommets.

5. Réciproquement, soit T une couverture de G_E à au plus $l + 2k$ sommets. Montrer qu'alors E est satisfaite.

6. Qu'en déduisez-vous pour le problème **VERTEX COVER** ?