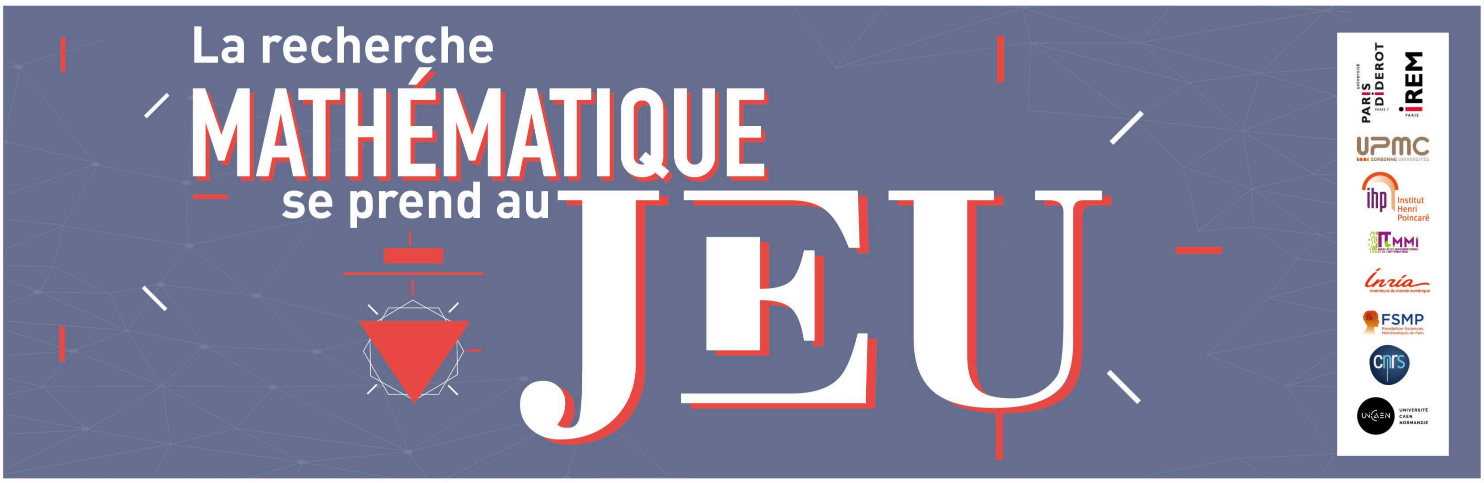
Salon des Jeux 2017

Listing et descriptif des animations pour le stand La recherche mathématique se prend au jeu



Dooble

Comment fabriquer un jeu de Dobble ?
Pour les plus jeunes :
construis ton mini-dobble et repars avec.

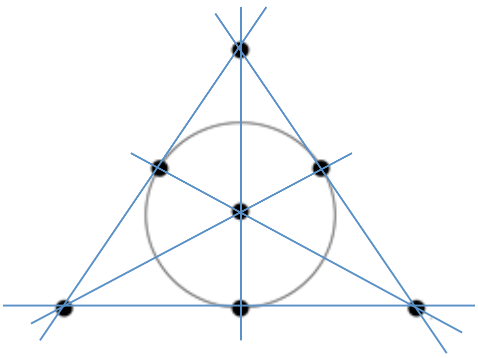
Fiche animateur « Dobble »

Avant tout, qu'est-ce que le Dobble ?

Le jeu du Dobble contient 55 cartes. Sur chacune d'elles sont dessinés 8 symboles. Lorsque l'on prend deux cartes dans le jeu, n'importe lesquelles, elles ont toujours un et un seul symbole en commun. Ensuite, il y a plusieurs petits jeux différents mais à chaque fois cela repose sur la rapidité à trouver le symbole commun entre deux cartes. Nous vous mettons les règles du jeu, si cela vous intéresse.

Fiche animateur « Dobble » Jaune

1.



2. / 3. 6 droites donc 6 cartes (vu que carte=droite).

4. symbole = point donc comme il y a trois points par droite, il y a 3 symboles par carte. De plus, il y a 7 points en tout, donc 7 symboles en tout dans le jeu.

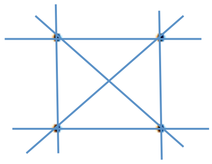
5. Pour s'aider, on peut mettre une couleur (gommette) sur chaque point puis construire les cartes au bout de chaque droite avec les trois couleurs.

On obtient ainsi le jeu avec 6 cartes de 3 symboles.

On peut alors suggérer la possibilité de rajouter des cartes. En effet, on peut construire une septième carte (qui correspond au cercle sur la figure avec les trois couleurs sur le cercle). On ne peut pas faire des cartes en plus (avec seulement 3 symboles par carte).

Fiche animateur « Dobble » Orange et Bleu

1.



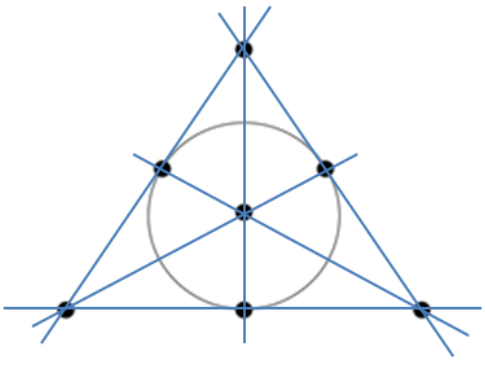
2. 6 droites / par un point passent trois droites.

3. On veut 4 cartes et 3 symboles donc on va choisir la méthode de la figure 1 où point=carte (vu qu'il y a 4 points) et droite=symbole (vu que trois droites passent par chaque point).

4. Si on prend la méthode de la figure 2 où point=symbole et droite=carte, on obtient des cartes qui n'ont pas de symboles en commun (les droites parallèles). Il faut se rappelle que dans le principe que l'on utilise : *« deux droites non parallèles se coupent toujours en* ***un (et un seul)*** *point »,* il y a bien l'hypothèse de **droites NON parallèles**.

On va alors proposer une nouvelle configuration où il n'y a plus de droites parallèles (on va donc pouvoir utiliser la méthode 2). On utilise la géométrie projective, les droites parallèles se coupent en un même point.

5. Avec la méthode 2, qui peut sembler plus adaptée. On obtient alors 6 cartes de 3 symboles. Cependant, il est possible de trouver une septième carte (d'où la question…). On ne peut pas rajouter une septième droite (sans ajouter de points), il faut donc voir quels symboles ont été utilisés moins que les autres et alors trouver la $7^{\text{ème}}$ carte. Il s'agit en fait du cercle :



Remarque : en géométrie projective, un cercle est une droite.

Pour ceux qui utilisent la méthode 1, ils vont avoir sept cartes dont trois avec seulement 2 symboles (au lieu de 3). Il faut alors penser à ajouter un nouveau symbole sur les cartes et nécessairement ce symbole doit être le même pour les trois cartes, sinon elles n'auront pas de symboles communs entre elles (deux à deux).

Seulement pour les bleus :

6. A la question 3 le jeu n'est pas parfait car contient 4 cartes et utilise 6 symboles en tout. A la question 5, le jeu complété à 7 cartes est parfait.

7. Isolons les 8 cartes contenant le symbole « arbre ». Sur chacune d'elle apparaissent 7 autres symboles, qui ne peuvent pas etre en commun à deux cartes puisque ces cartes partagent déjà le symbole « arbre ». On dénombre alors sur ces 8 cartes un total de 8*7+1=57 symboles. Le jeu utilise donc au moins 57 symboles mais n'a que 55 cartes. Il n'est donc pas parfait.

8. Voici le jeu de cartes proposé :

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9
9	10	11	12	0	1	2

7	8	9	10	11	?
8	9	10	11	12	?
10	11	12	0	1	?
3	4	5	6	7	?

Puisqu'on peut rajouter une carte, on va obtenir un jeu parfait de 13 cartes, utilisant 13 symboles et ayant 4 symboles par cartes. On peut montrer que dans ce cas un symbole apparaît exactement sur 4 cartes (c'est la dualité point/droite!). En effet, si un symbole apparaît sur (au moins) 5 cartes, en appliquant le raisonnement de la question précédente, on montre qu'on aurait alors au moins 5*3+1=16 symboles. Maintenant choisissons un symbole quelconque et isolons une carte contenant ce symbole. Les 12 cartes du reste du jeu peuvent se trier en 4 tas, selon les 4 symboles de cette carte. Puisqu'un symbole ne peut pas apparaitre sur 5 cartes, nécessairement chacun des tas formés comporte 3 cartes. Le symbole initial apparaît donc sur 4 cartes exactement.

C'est cette méthode de tri qui permet de retrouver la carte manquante. Par exemple, dans le jeu proposé, isolons la carte « (0, 1, 3, 9) ». On trie le reste du jeu en 4 tas. Le tas « 0 », le tas « 1 », le tas « 3 », le tas « 9 ». Le tas « 0 » est plus petit que les autres. Ce symbole n'apparait que sur 3 cartes: (0,1,3,9), (0,4,5,7), (0,6,10,11). La carte que l'on peut ajouter doit donc contenir « 0 » et aucun des autres symboles contenus sur ces 3 cartes. Une seule solution : (0,2,8,12) !

C'est avec ce type de méthode que l'on pourrait compléter le jeu Dobble du commerce. Mais avec quelques complications car dans ce cas il manque deux cartes.

Stand DOBBLE

Le jeu

Le jeu du Dobble contient 55 cartes. Sur chacune d'elles sont dessinés 8 symboles. Lorsque l'on prend deux cartes dans le jeu, n'importe lesquelles, elles ont toujours un et un seul symbole en commun !
La conception du jeu n'a donc pas été faite au hasard.

Comment fabrique-t-on un tel jeu ?

université PARIS DIDEROT PARIS 7

UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

cnrs

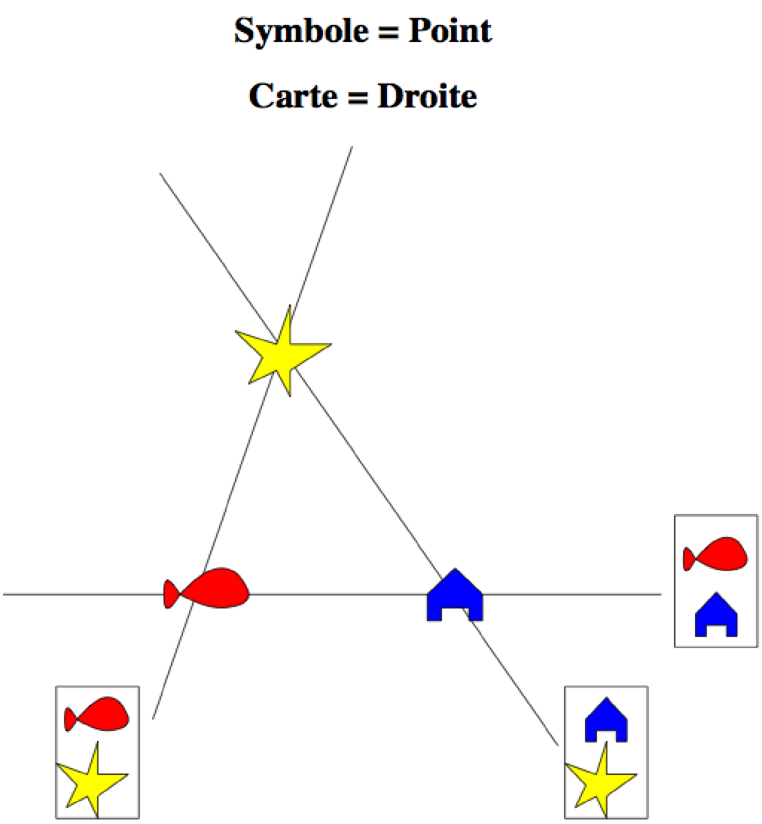
IREM PARIS

Stand DOBBLE

Idée

On peut voir :
· les symboles comme des points,
et
· les cartes comme des droites passant par ces points.

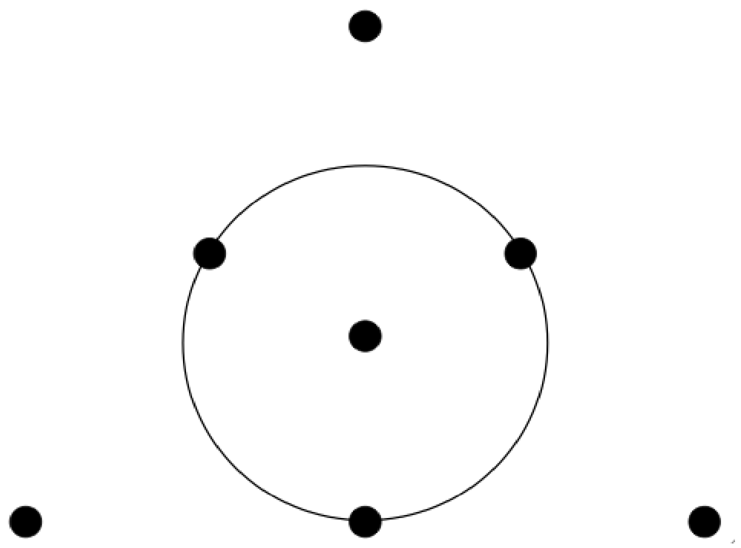
Il s'agit ensuite de trouver une bonne configuration géométrique !



Stand DOBBLE

Nous allons essayer de fabriquer un mini Dobble.

1. Relie par des droites les points du dessin ci-dessous de sorte à avoir toujours trois points par droite.



Stand DOBBLE

2. Combien de droites obtiens-tu ?

3. Si on utilise la méthode présentée à la page 2, combien y aura-t-il de cartes dans notre jeu ?

4. Combien y aura-t-il de symboles par carte ? Et combien de symboles en tout dans le jeu?

5. Tu vas maintenant utiliser le dessin obtenu pour fabriquer ton mini Dobble. Colle une gommette différente sur chaque point et ensuite construis ton jeu (p. 5).

Ton mini Dobble à découper

Stand DOBBLE

Le jeu

Le jeu du Dobble contient 55 cartes. Sur chacune d'elles sont dessinés 8 symboles. Lorsque l'on prend deux cartes dans le jeu, n'importe lesquelles, elles ont toujours un et un seul symbole en commun !
La conception du jeu n'a donc pas été faite au hasard.

Comment fabrique-t-on un tel jeu ?

Les maths

Deux cartes possèdent toujours ***un (et un seul)*** *symbole en commun.*

Cela rappelle un principe de géométrie très simple :
par deux points distincts passe toujours ***une (et une seule)*** *droite.*

Ou un principe analogue :
deux droites non parallèles se coupent toujours en ***un (et un seul)*** *point.*

Stand DOBBLE

Idée

En utilisant ces principes de géométrie, on peut alors :
· voir les cartes comme des points, et les symboles comme des droites passant par ces points,

ou

· voir les symboles comme des points, et les cartes comme des droites passant par ces points.

Il s'agit ensuite de trouver une bonne configuration géométrique !

Carte = Point
Symbole = Droite

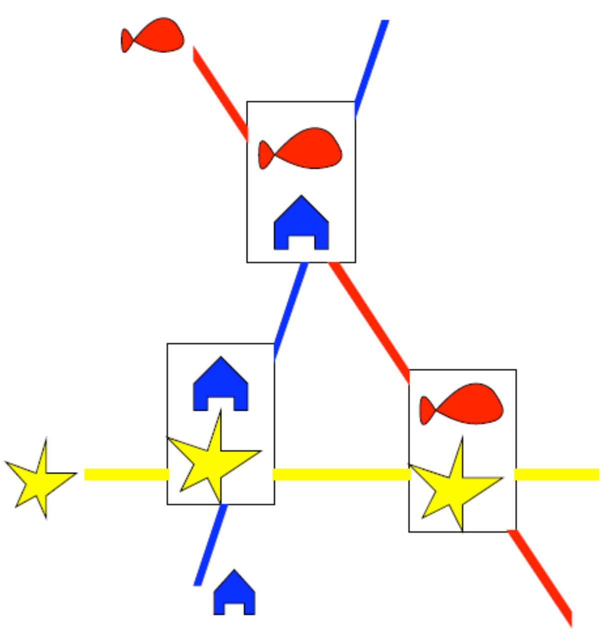


Figure 1

ou

Symbole = Point
Carte = Droite

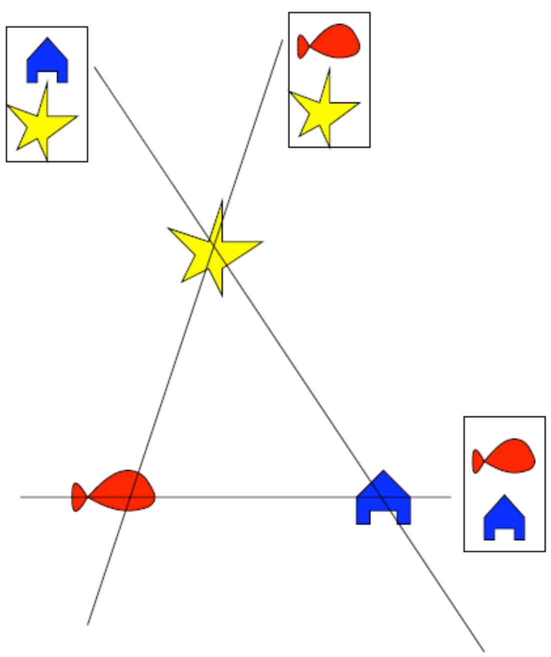
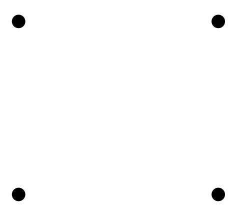


Figure 2

Stand DOBBLE

Essayons de construire un mini Dobble.

1. Tracez toutes les droites possibles passant chacune par deux points de l'ensemble de points donné ci-dessous.



2. Combien de droites avez-vous obtenues ?

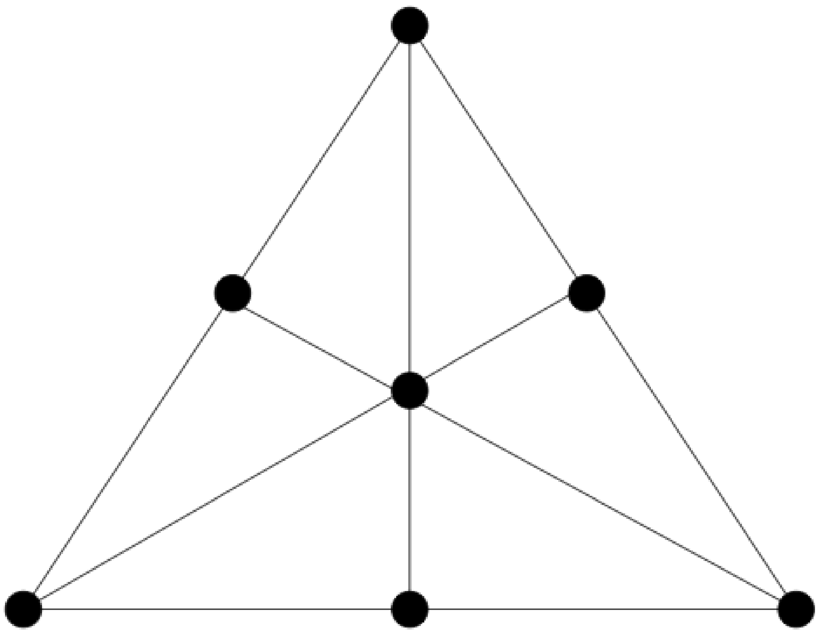
Combien de droites passent par un point donné ?

3. À l'aide de la figure de la question 1, proposez un jeu de Dobble qui aurait 4 cartes et 3 symboles par carte. De combien de symboles en tout aurez-vous besoin ?

4. Si l'on utilise la méthode de la figure 2, qu'obtient-on ?

Stand DOBBLE

La configuration des points de départ est maintenant modifiée pour améliorer le jeu obtenu précédemment.



5. Utilisez ce nouveau dessin pour compléter votre mini Dobble.

Arrivez-vous à le compléter en un jeu de 7 cartes ?

Mini Dobble

Stand DOBBLE

Le jeu

Le jeu du Dobble contient 55 cartes. Sur chacune d'elles sont dessinés 8 symboles. Lorsque l'on prend deux cartes dans le jeu, n'importe lesquelles, elles ont toujours un et un seul symbole en commun !
La conception du jeu n'a donc pas été faite au hasard.

Comment fabrique-t-on un tel jeu ?

Les maths

*Deux cartes possèdent toujours **un (et un seul)** symbole en commun.*

Cela rappelle un principe de géométrie très simple : *par deux points distincts passe toujours **une (et une seule)** droite.*

Ou un principe analogue :
*deux droites non parallèles se coupent toujours en **un (et un seul)** point.*

Stand DOBBLE

Idée

En utilisant ces principes de géométrie, on peut alors :
- voir les cartes comme des points, et les symboles comme des droites passant par ces points,

ou

- voir les symboles comme des points, et les cartes comme des droites passant par ces points.

Il s'agit ensuite de trouver une bonne configuration géométrique !

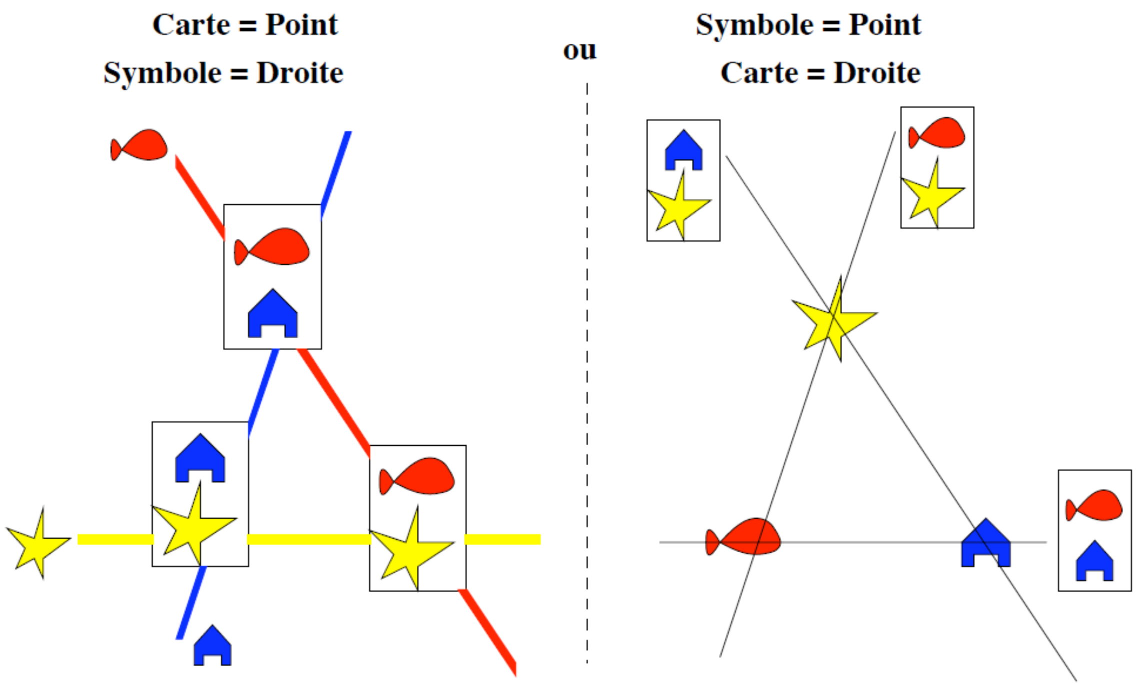


Figure 1 Figure 2

Stand DOBBLE

3

Essayons de construire un mini Dobble.

1. Tracez toutes les droites possibles passant chacune par deux points de l'ensemble de points donné ci-dessous.

2. Combien de droites avez-vous obtenues ?

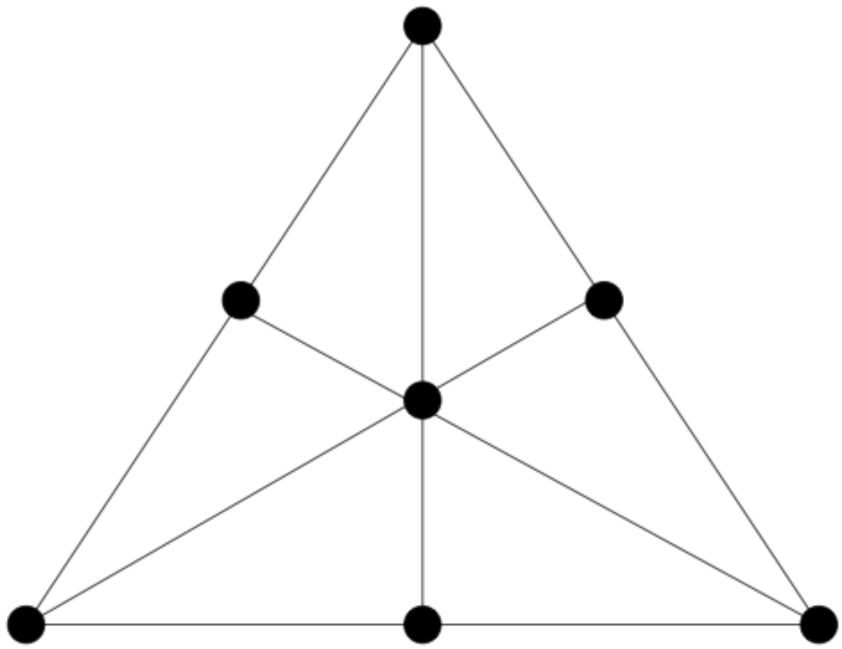
Combien de droites passent par un point donné ?

3. A l'aide de la figure de la question 1, proposez un jeu de Dobble qui aurait 4 cartes et 3 symboles par carte. De combien de symboles en tout aurez-vous besoin ?

4. Si l'on utilise la méthode de la figure 2, qu'obtient-on ?

Stand DOBBLE

La configuration des points de départ est maintenant modifiée pour améliorer le jeu obtenu précédemment.



5. Utilisez ce nouveau dessin pour compléter votre mini Dobble.

Arrivez-vous à le compléter en un jeu de 7 cartes ?

Stand DOBBLE

On dira qu'un jeu est **parfait** si le nombre de cartes est égal au nombre de symboles utilisés en tout.

6. Les jeux construits aux questions 3 et 5 sont-ils parfaits ?

7. Dans le jeu Dobble du commerce le symbole « arbre » apparaît sur 8 cartes. Utilisez cette information pour déterminer si le jeu Dobble est parfait ou non.

8. Le jeu de cartes proposé sur la table n'est pas parfait. Il contient 12 cartes et utilise 13 symboles (les nombres de 0 à 12). On peut rajouter une carte ! Trouvez-la.
Indication : isoler une carte et trier le reste du jeu en fonction des symboles de cette carte.

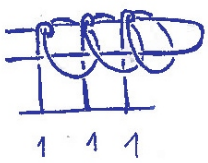
Baguenaudier

Comment le code de Gray peut aider à résoudre un casse-tête chinois

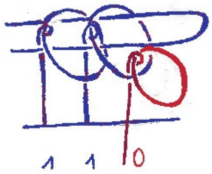
Fiche Animateurs Stand Baguenaudier

L'animation "baguenaudier" a été divisée en 3 étapes. La première, "chemins hamiltoniens" vise à introduire la construction du "code de Gray" faite en seconde partie. La troisième, pour terminer, est l'utilisation du code de Gray pour dénouer le casse-tête appelé Baguenaudier.

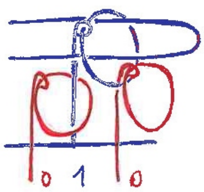
Le déroulement du stand :
- des feuilles avec carrés et cubes où sont indiquées les coordonnées sont mises à disposition du public pour la première partie.
- à la fin de la seconde partie, on dévoile le code de Gray à 5 bits pour qu'il soit prêt à être utilisé dans la troisième partie.
- au début de la troisième partie, on donne le casse-tête et on laisse les gens réfléchir. On leur explique les deux manières de sortir un anneau de la tringle (voir figure).



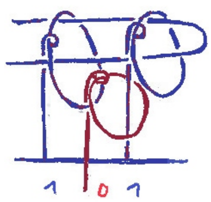
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 1 –

Vous avez en (a) la position "maximale" du baguenaudier, celle du départ du casse-tête. Le premier anneau peut toujours être changé de position, aussi on peut passer de (a) à (b) et réciproquement. Le deuxième mouvement réalisable est de bouger l'anneau derrière le premier enlacé. Ainsi on peut passer de (a) à (d) (et réciproquement), ou bien de (b) à (c) (et réciproquement). (Les 0 et 1 sur la figure constituent la traduction de chaque position en code de Gray.)

Quelques remarques supplémentaires pour les différentes fiches :

Pour la version jaune :

- Question B : Penser à faire remarquer qu'il y a plusieurs chemins solutions pour le cube, alors qu'il y en avait un seul pour le carré.
- La partie 4(++) est à faire uniquement si le reste s'est bien passé... On pourra insister sur le nombre de mouvements nécessaires pour 3 anneaux, à comparer avec le nombre de mouvements nécessaires pour 5 anneaux.

Pour la version orange :

- Question 2-C : Pour les plus grands, c'est l'occasion de remarquer qu'à nouveau on a un code dont deux mots consécutifs ne diffèrent que d'une lettre. Ainsi, sans même vérifier sur le cube en traçant effectivement le chemin, on sait que le code est solution, puisqu'il passe par tous les sommets une et une seule fois et que la différence d'une seule lettre permet de savoir qu'on a bien emprunter une arête pour passer d'un sommet au suivant.
- Question 2-F : il faut que la règle permettant de passer d'un mot au suivant soit clairement établie avant de passer à la suite : on change, une fois sur deux, soit la lettre la plus à droite, soit la lettre à gauche du 1 le plus à droite.

Pour la version bleue :

- Mêmes remarques que pour les oranges.
- Question 3-D : en fonction de la parité, il faut soit commencer par enlever le premier anneau tout à droite, soit commencer par enlever le deuxième (conséquence de la construction du code par image miroir). Si on se trompe, on va parcourir le mauvais côté du code depuis 11111...111, et arriver à la position 10000..000 et non 000000..000.
- Question 3-E : voir explication qui suit.
- Question 3-F : Il faudra environ 51 ans pour défaire le baguenaudier à 30 anneaux ! On peut en profiter pour faire remarquer ce qu'il en coûte de se tromper lors du premier coup...

Pour le niveau expert (bleu), les questions E et F en partie 3 nécessitent de faire un peu de calcul.

En question E, il s'agit de démontrer que le nombre minimal de mouvements à réaliser sur un baguenaudier à n anneaux pour passer de "tous les anneaux sont enlacés" à "tous les anneaux sont libérés" est égal à :

$$\begin{cases} \dfrac{2^{n+1}-2}{3} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{2^{n+1}-1}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On reprend la construction du code de Gray par image miroir et on regarde le rang occupé par le mot avec que des 1 dans le code. Notons n le nombre de lettres, et appelons x_n le rang que nous recherchons.(Attention, le nombre de coups recherché n'est pas x_n mais $x_n - 1$!)

Pour $n = 1$, on a $x_1 = 2$. Pour $n = 2$, on a $x_2 = 3$. Etc.

On considère le code de Gray à $n-1$ lettres. Par définition de x_{n-1}, il y a x_{n-1} mots de 00...00 (rang 1) jusqu'à 11...11 (rang x_{n-1}), et il y a $2^{n-1} - x_{n-1}$ mots restant jusqu'au mot 10..00. Comptant à partir de 10..00 en remontant jusque 11..11, on trouve $2^{n-1} - x_{n-1} + 1$ mots.

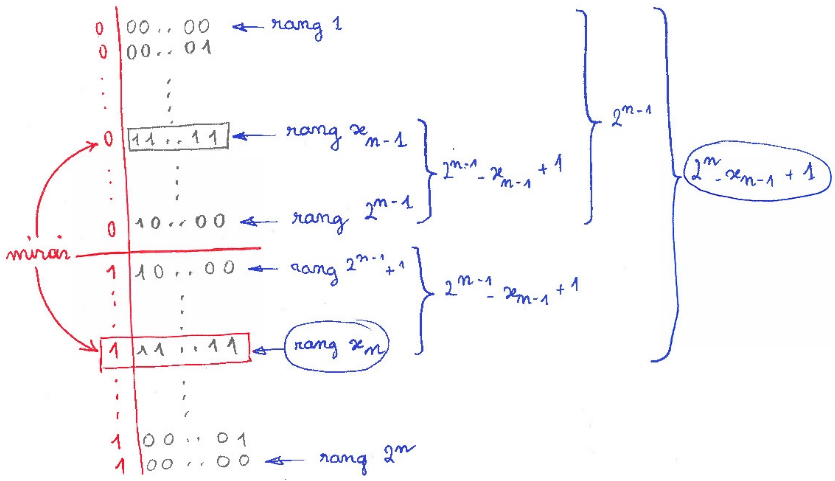


FIGURE 2 –

On construit l'image miroir afin d'obtenir le code à n lettres. Le mot avec n lettres 1 est le symétrique du mot avec $n-1$ lettres 1 et un zéro rajouté à gauche dans la construction. Pour obtenir le rang x_n de ce mot avec n lettres 1, on compte ainsi les 2^{n-1} mots "au-dessus" du miroir (de 00..00 à 010..00), puis $2^{n-1} - x_{n-1} + 1$ mots pour atteindre celui avec n lettres 1.

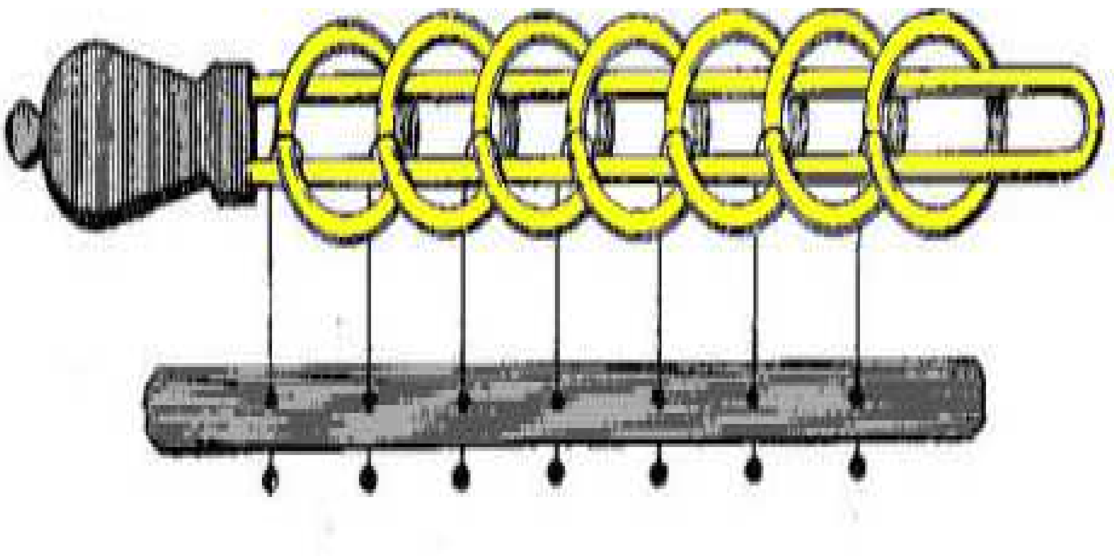
On a donc : $x_n = 2^n - x_{n-1} + 1 = 2^n - (2^{n-1} - x_{n-2} + 1) = ...$ On voit ainsi apparaître une somme alternée de puissance de 2, ainsi que des 1 qui s'éliminent deux par deux. On écrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } n \text{ pair } : x_n = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^3 + x_2 = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^3 + 3 = \dfrac{2^{n+1}+1}{3} \\ \text{pour } n \text{ impair } : x_n = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^2 + x_1 = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^2 + 2 = \dfrac{2^{n+1}+2}{3} \end{cases}$$

D'où le nombre de mouvements, $x_n - 1$, comme annoncé.

Rallye Mathématique de Jussieu
Fête de la Science

Stand Baguenaudier



université PARIS DIDEROT PARIS 7

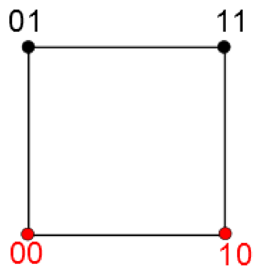
UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

cnrs dépasser les frontières

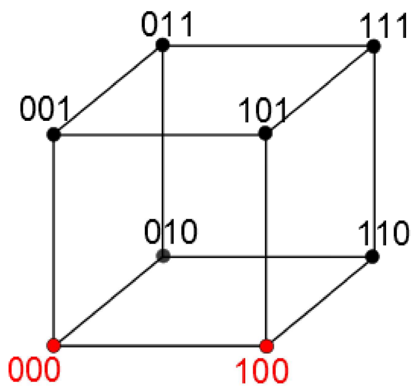
IREM PARIS

1- Chemins hamiltoniens

A- Sur les bords du carré, tracez un chemin qui relie le sommet 00 au sommet 10 en passant une et une seule fois par chacun des sommets.



B- Passons maintenant au cube. Tracez un chemin sur les arêtes qui relie le sommet 000 au sommet 100 en passant une et une seule fois par chacun des sommets. Écrivez la liste des sommets dans l'ordre dans lequel on les rencontre en parcourant ce chemin.



2 – Code de Gray

C- On parcourt les sommets dans l'ordre suivant :

000
001
011
010
110
111
101
100

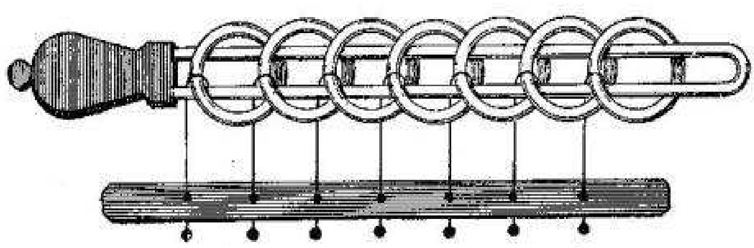
Dessinez le chemin correspondant sur le cube. Est-ce qu'il répond à la question précédente ?

D- Observez les codes de chaque sommet. Combien de chiffres changent entre deux sommets consécutifs sur le chemin ?

Ce code s'appelle un code de Gray.

3- Le baguenaudier

On passe maintenant au baguenaudier. C'est un casse-tête : le but est d'enlever tous les anneaux de la tringle.



Lorsqu'un anneau enlace la tringle, on le code par un 1. Lorsqu'il est enlevé de la tringle, on le code par un 0. On prend toujours la poignée du casse-tête dans la main gauche. Ainsi, à chaque position du casse-tête correspond un code de 0 et de 1. Par exemple, sur le dessin ci-dessus, le code correspondant à la position du baguenaudier est 1111111. Le but est d'obtenir la position 0000000, correspondant à tous les anneaux enlevés.

E- On s'intéresse au baguenaudier à 3 anneaux.
Pouvez-vous le mettre dans la position 110 ?

F- On ré-utilise le code de Gray dont on s'est servi pour le cube. Faites les mouvements successifs du code entre 111 et 000 pour enlever tous les anneaux !

4- Le baguenaudier (++)

On peut généraliser la méthode précédente et résoudre un baguenaudier avec plus d'anneaux. Le code de Gray à 5 chiffres est le suivant :

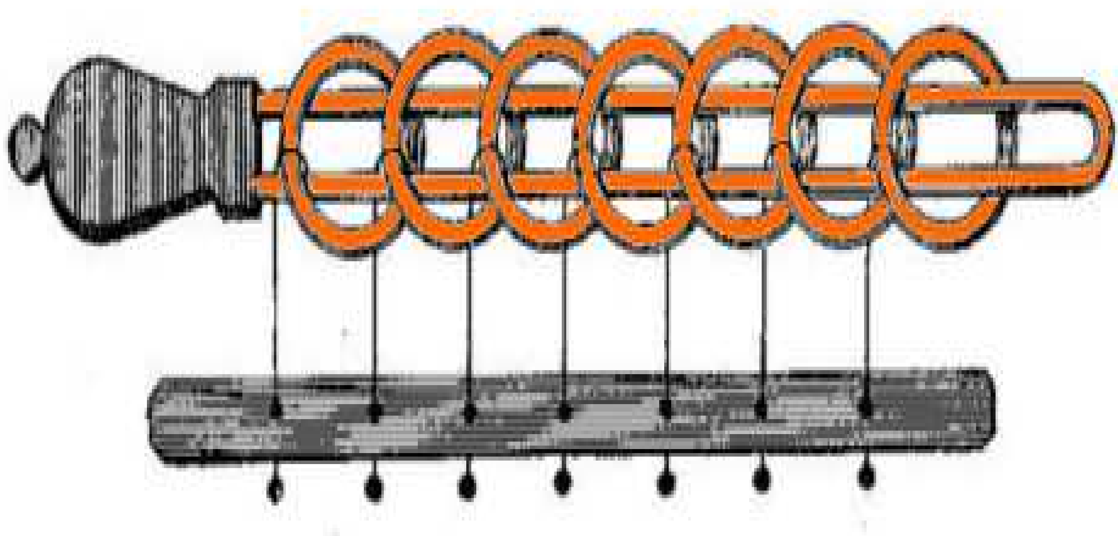
00000
00001
00011
00010
00110
00111
00101
00100
01100
01101
01111
01110
01010
01011
01001
01000
11000
11001
11011
11010
11110
11111
11101
11100
10100
10101
10111
10110
10010
10011
10001
10000

G- Repérez la ligne du code correspondant à la position de départ du casse-tête (quand tous les anneaux sont enlacés).

H- Comptez combien d'étapes vont être nécessaires pour défaire complètement le baguenaudier à 5 anneaux.

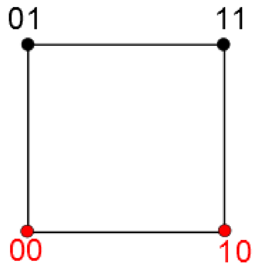
I- Suivez ce code pour résoudre le baguenaudier à 5 anneaux.

Stand Baguenaudier

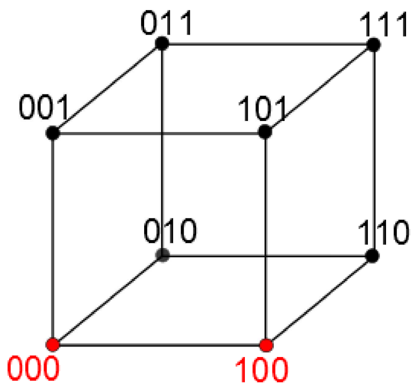


1- Chemins hamiltoniens

A- On code les sommets du carré par leurs coordonnées. Écrivez la suite des sommets du chemin reliant les sommets 00 et 10, en passant une et une seule fois par chaque sommet.



B- Saurez-vous répondre à la même question avec un cube, en trouvant un chemin reliant les sommets 000 et 100 en passant une et une seule fois par chacun des sommets du cube ?



C- Au niveau du codage, comment se traduit le fait que deux sommets qui se suivent sur le chemin solution sont reliés par une arête ?

2 - Code de Gray

On construit ici le code de Gray. Chaque “mot” du code est composé uniquement de 0 et de 1, et le nombre de lettres total de tous les mots est fixé à l'avance.

Le code de Gray à une lettre est composé de deux mots :
0
1

Le code de Gray à deux lettres est obtenu à partir du code de Gray à une lettre par “image miroir” : à partir de l'écriture du code de Gray à une lettre, on construit son symétrique, puis on ajoute une colonne en mettant des 0 dans la première moitié et des 1 dans la deuxième.

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 11 \\ 10 \end{array}$$

A- Remarquez que d'un mot au suivant il n'y a qu'une seule lettre qui change. Vérifiez que le code de Gray des mots à 2 lettres donne le chemin solution du problème précédent dans le carré.

B- Avec la même méthode d'image miroir, construisez le code Gray à 3 lettres.

C- Obtient-on un chemin solution pour le cube ?

2 - Code de Gray

De la même façon, on peut construire le code de Gray pour un nombre quelconque de lettres, en construisant successivement tous les codes plus petits.

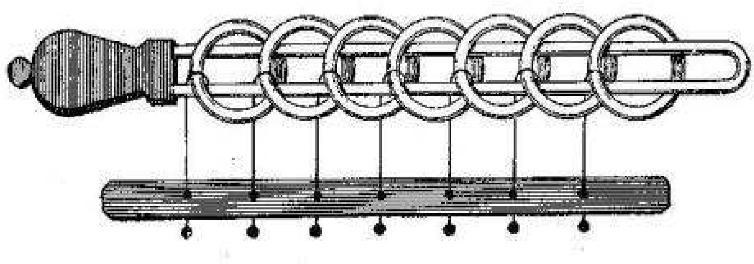
D- Combien de mots y a-t-il dans le code de Gray à 3 lettres ? À 4 lettres ? Construisez-le.

E- Si deux mots se suivent dans le code, combien de lettres différentes ont-ils ?

F- Plus précisément, observez le code de Gray à 4 lettres construit à l'étape D. Pouvez-vous conjecturer la règle permettant de passer d'un mot au suivant (quelle(s) lettre(s) change(nt)) ?

3- Le baguenaudier

On passe maintenant au baguenaudier.
C'est un casse-tête ; le but est d'enlever tous les anneaux de la tringle.



Voici les mouvements autorisés à chaque étape :
- le 1er anneau (le plus à droite sur la figure) peut toujours être mis en position d'enlacement ou sorti de la tringle ;
- l'anneau derrière le 1er anneau enlacé peut être bougé pour être mis en position d'enlacement ou sorti de la tringle.

Arriverez-vous à résoudre ce casse-tête ?

A- Comment coder le problème ?

B- À l'aide de l'étape 2-F, trouvez quel est le lien avec le code de Gray.

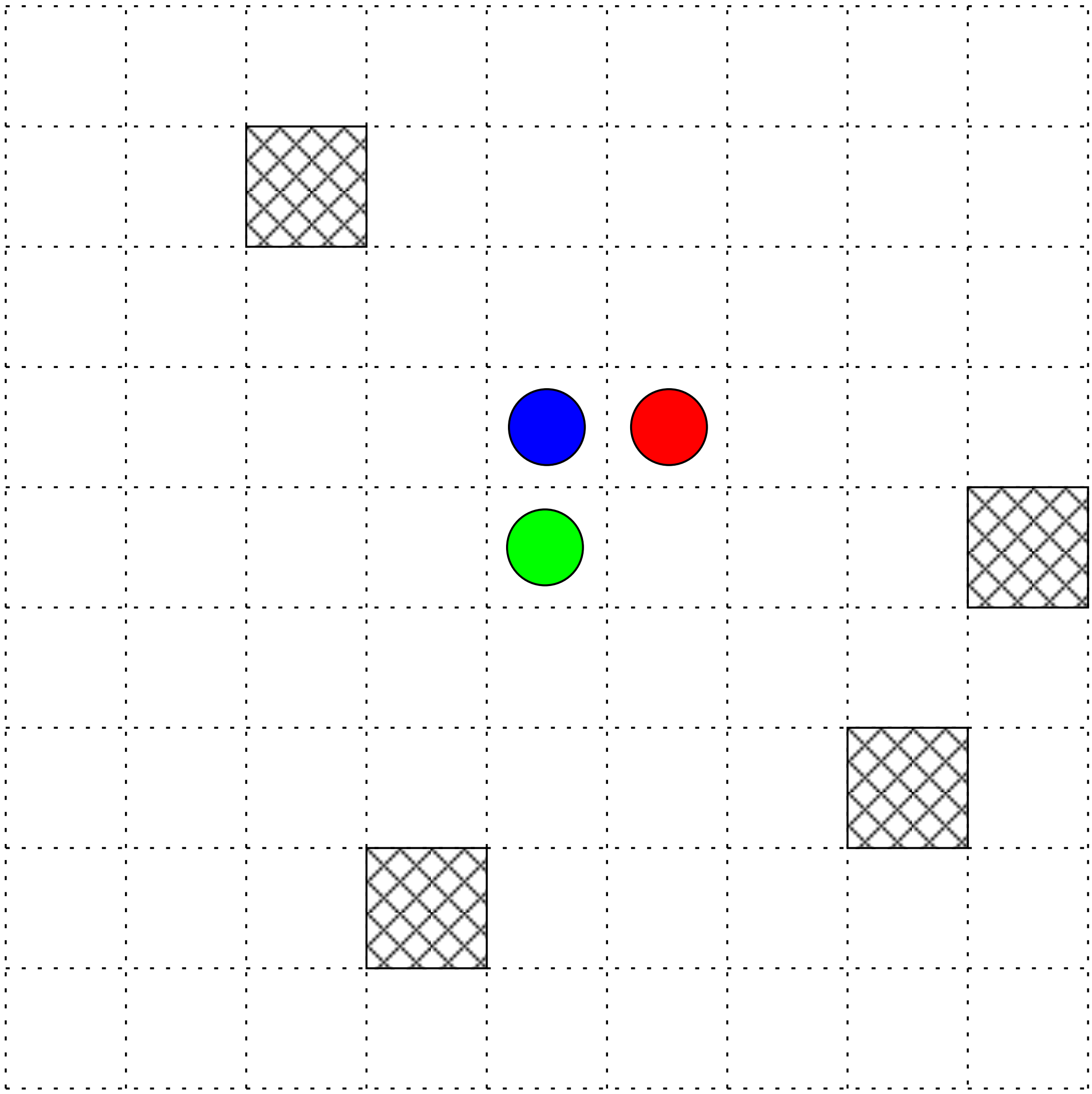
C- Proposez une solution.

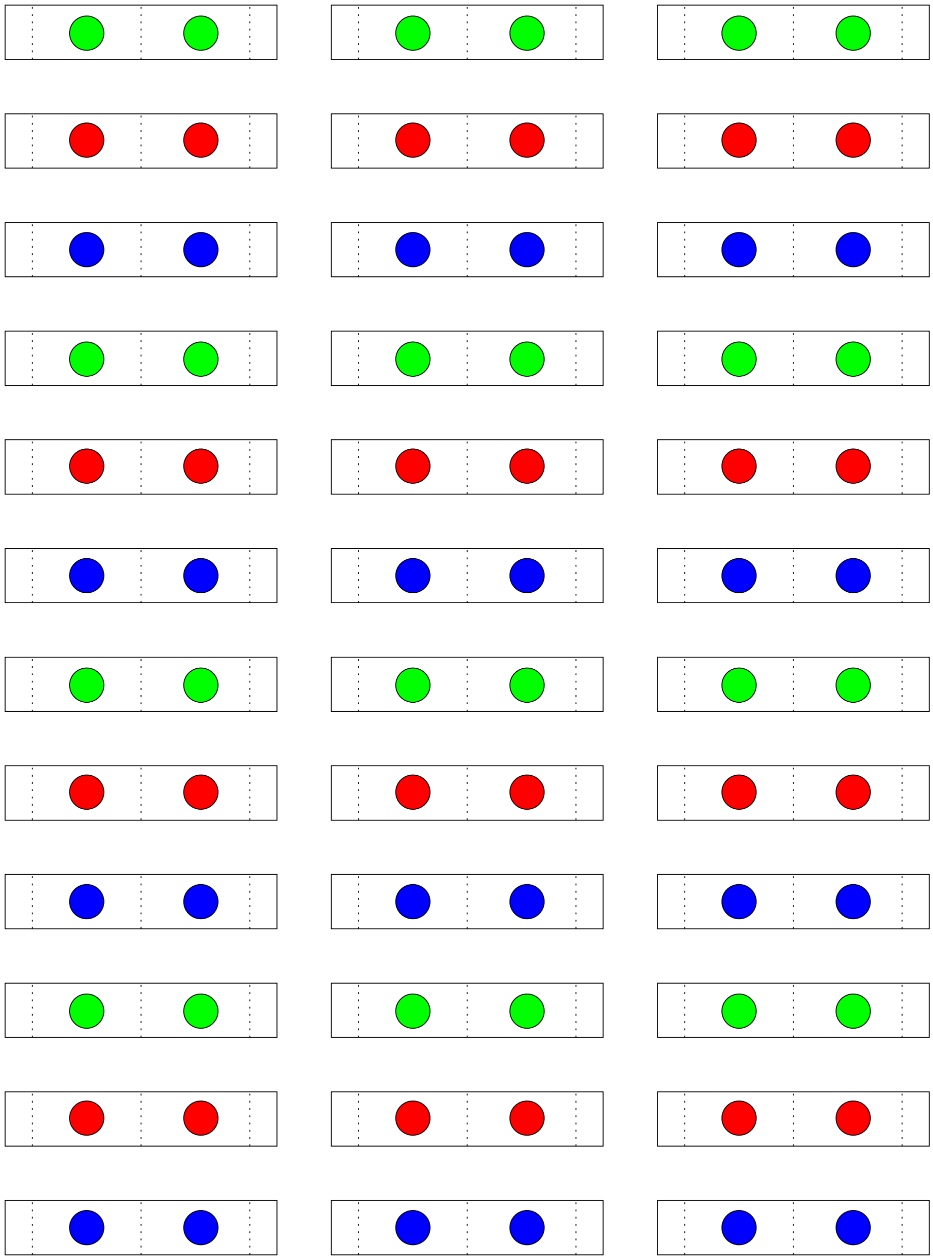
Saute-mouton

Il faut manipuler des jetons (moutons) pour essayer de les amener sur des cases « arrivée », mais ce n'est pas toujours possible (le travail porte alors sur la compréhension de cette impossibilité)

Saute-mouton

Trois moutons veulent regagner une bergerie. Un mouton ne peut se déplacer qu'en sautant par-dessus un autre mouton, la case où il atterrit étant la symétrique de la case de départ par rapport au mouton sauté. N'importe quel mouton peut-il rentrer dans n'importe quelle bergerie ?



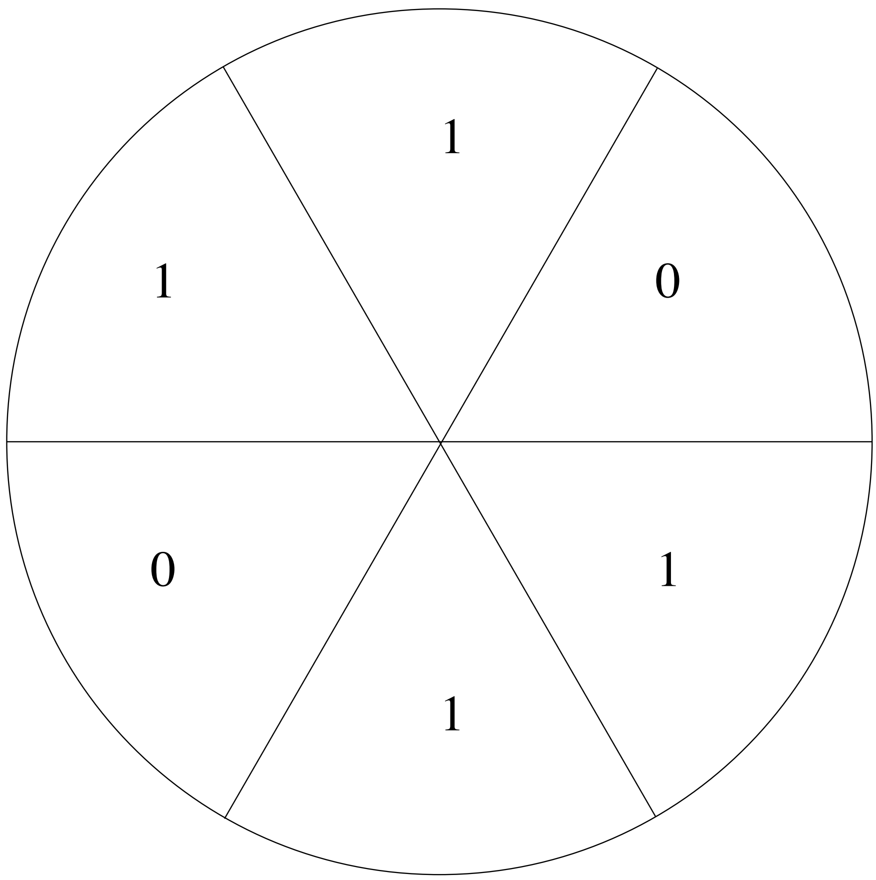


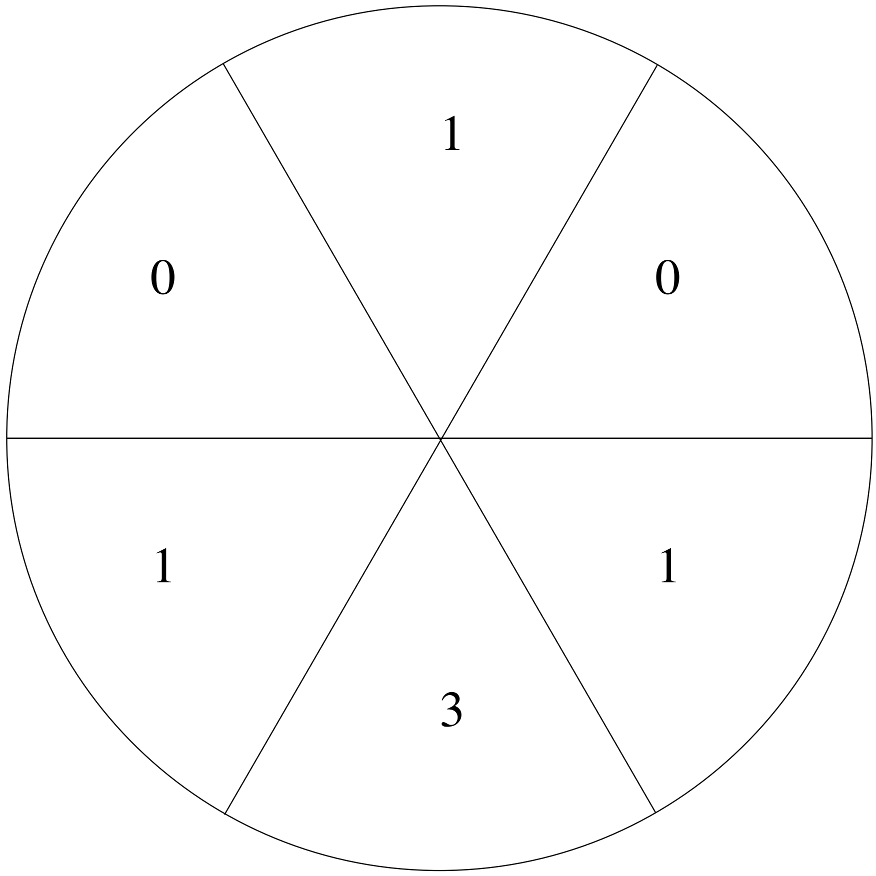
La grande roue

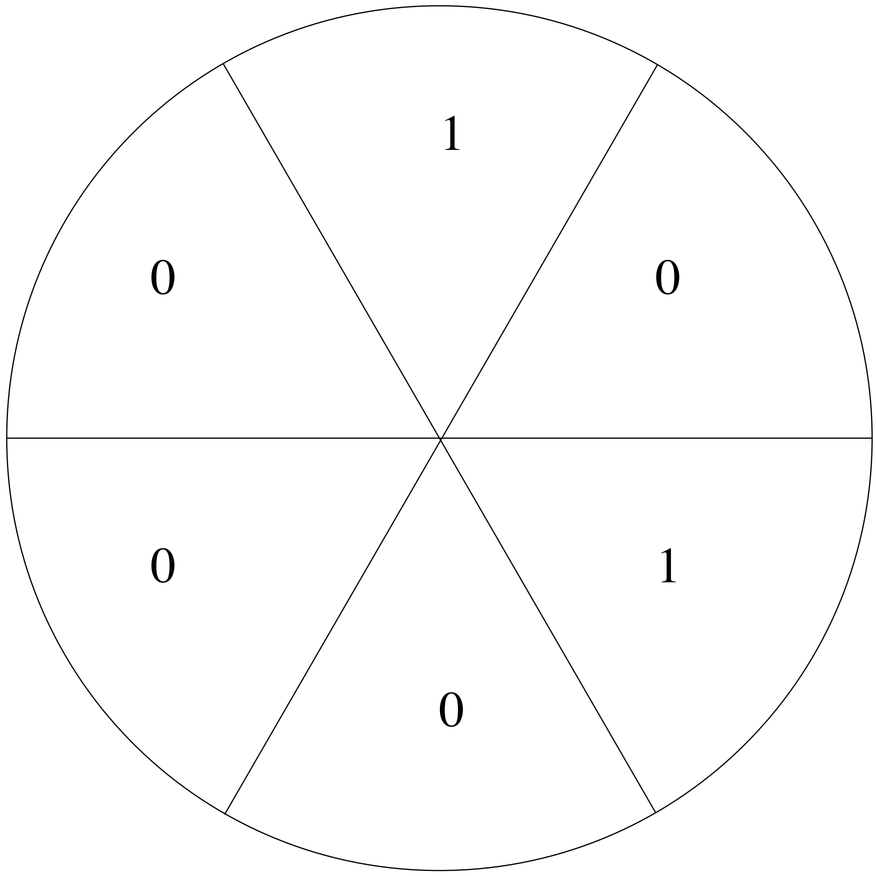
Il faut disposer des jetons pour satisfaire plusieurs contraintes, mais ce n'est pas toujours possible.

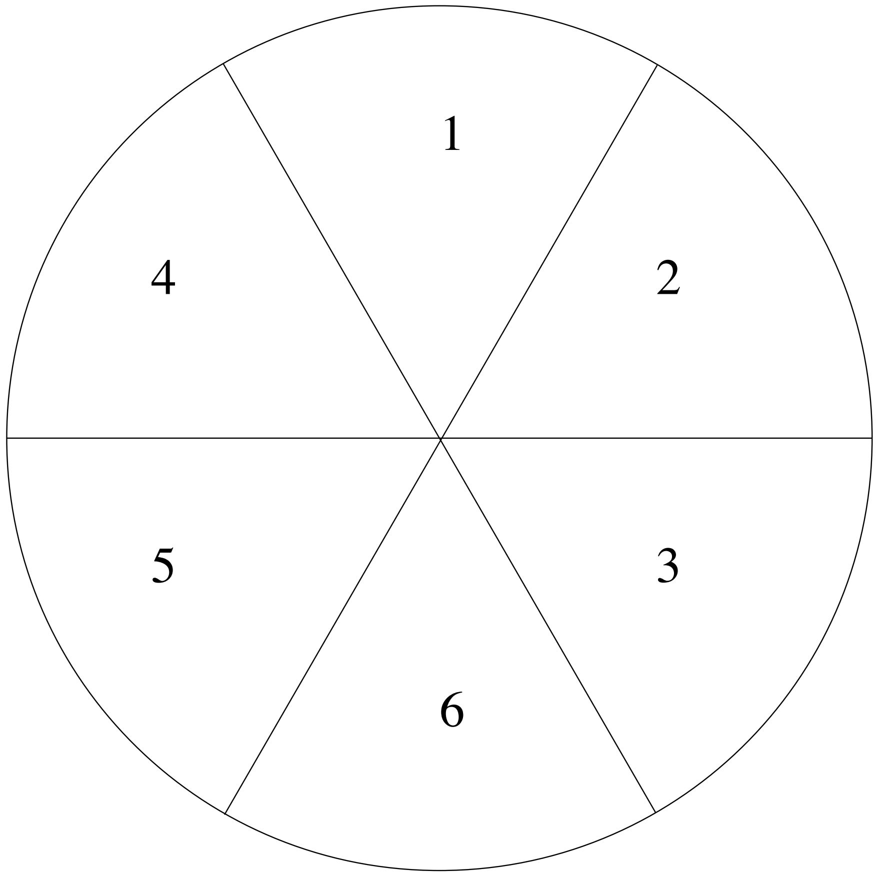
La grande roue

La roue est partagée en six parties contenant chacune un certain nombre de jetons. On peut ajouter, n'importe quand et autant de fois qu'on le souhaite, deux jetons dans deux parties ayant un coté en commun, on place alors un jeton dans chacune. Peut-on obtenir le même nombre de jetons dans toutes les parties ?




1
0
0
1
1
3


1
0
0
0
1
0

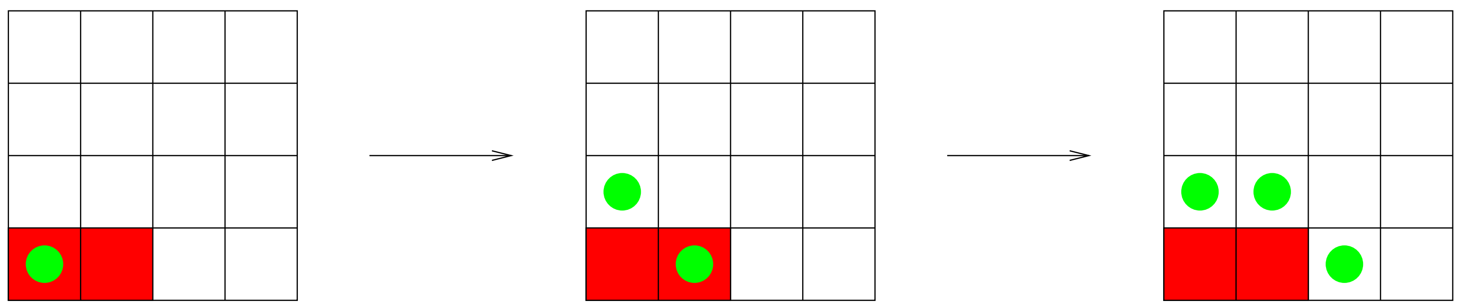

1
4
2
5
3
6

L'évasion des clones

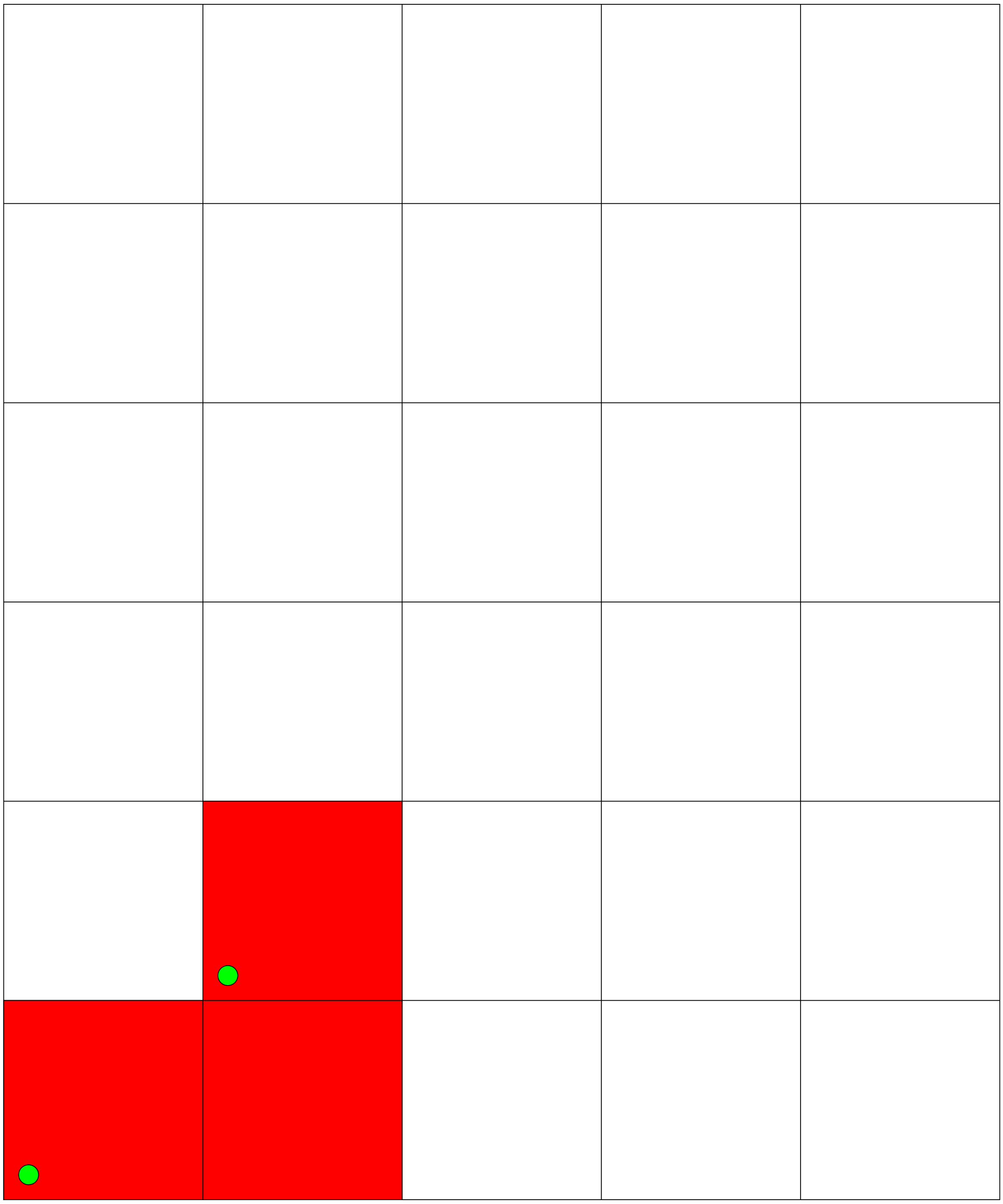
Il faut manipuler des jetons sur un quadrillage pour satisfaire plusieurs contraintes, mais ce n'est pas toujours possible.

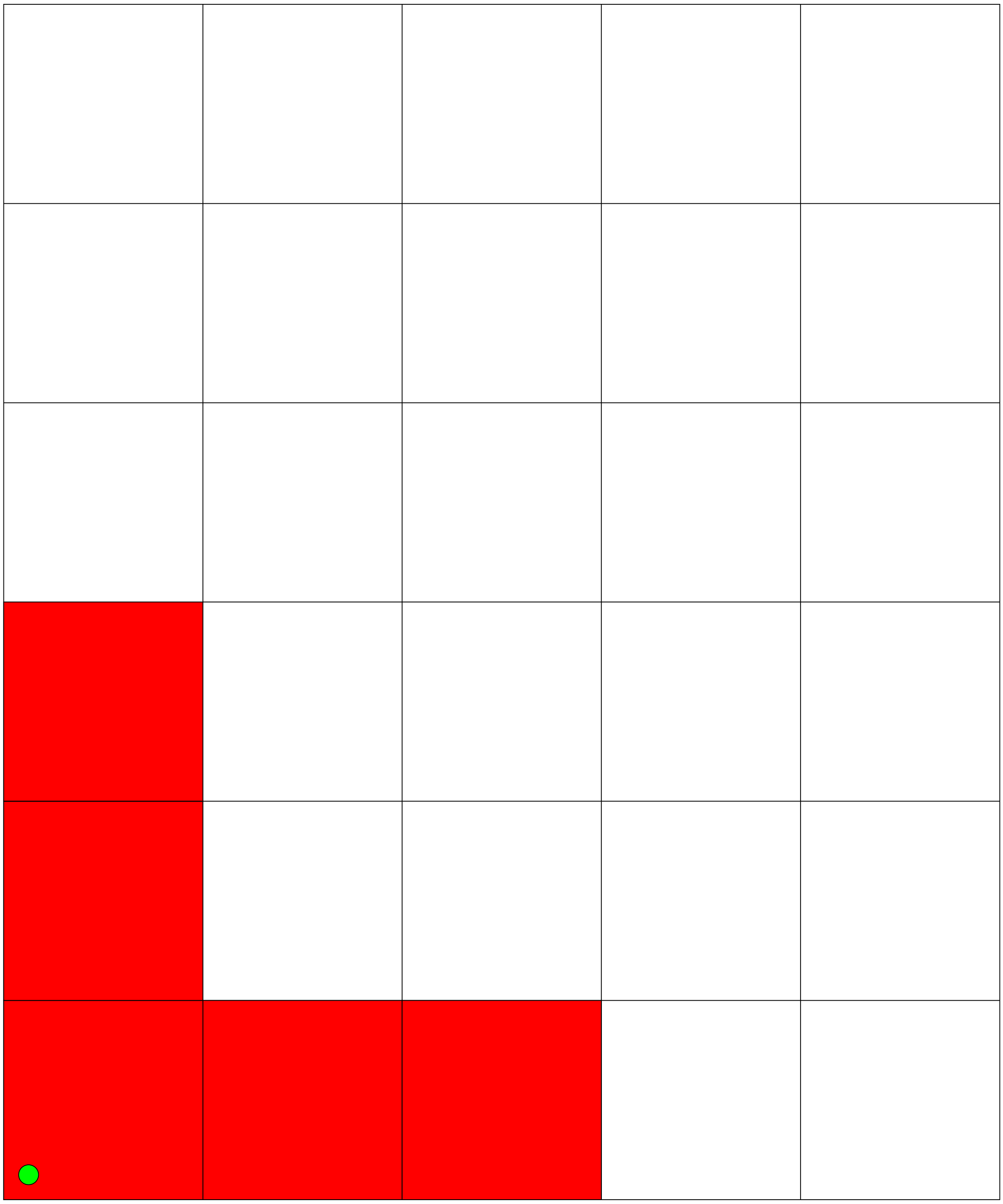
L'évasion des clones

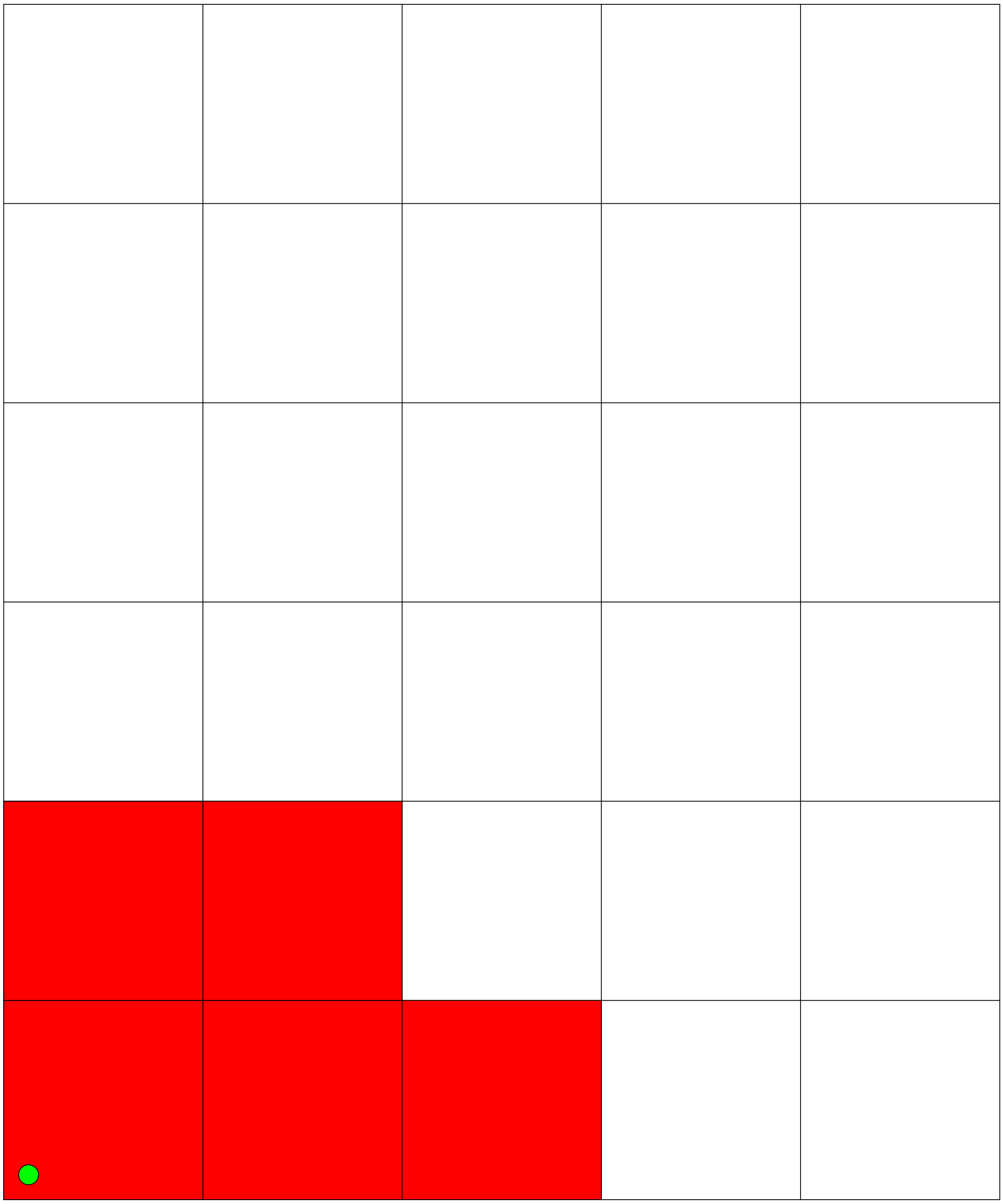
Des cellules (vertes) tentent de s'échapper de cases interdites (rouges). À chaque fois qu'une cellule quitte une case, elle se duplique ; un exemplaire se déplace d'une case vers le haut et l'autre d'une case vers la droite. Chaque case peut contenir au plus une cellule.

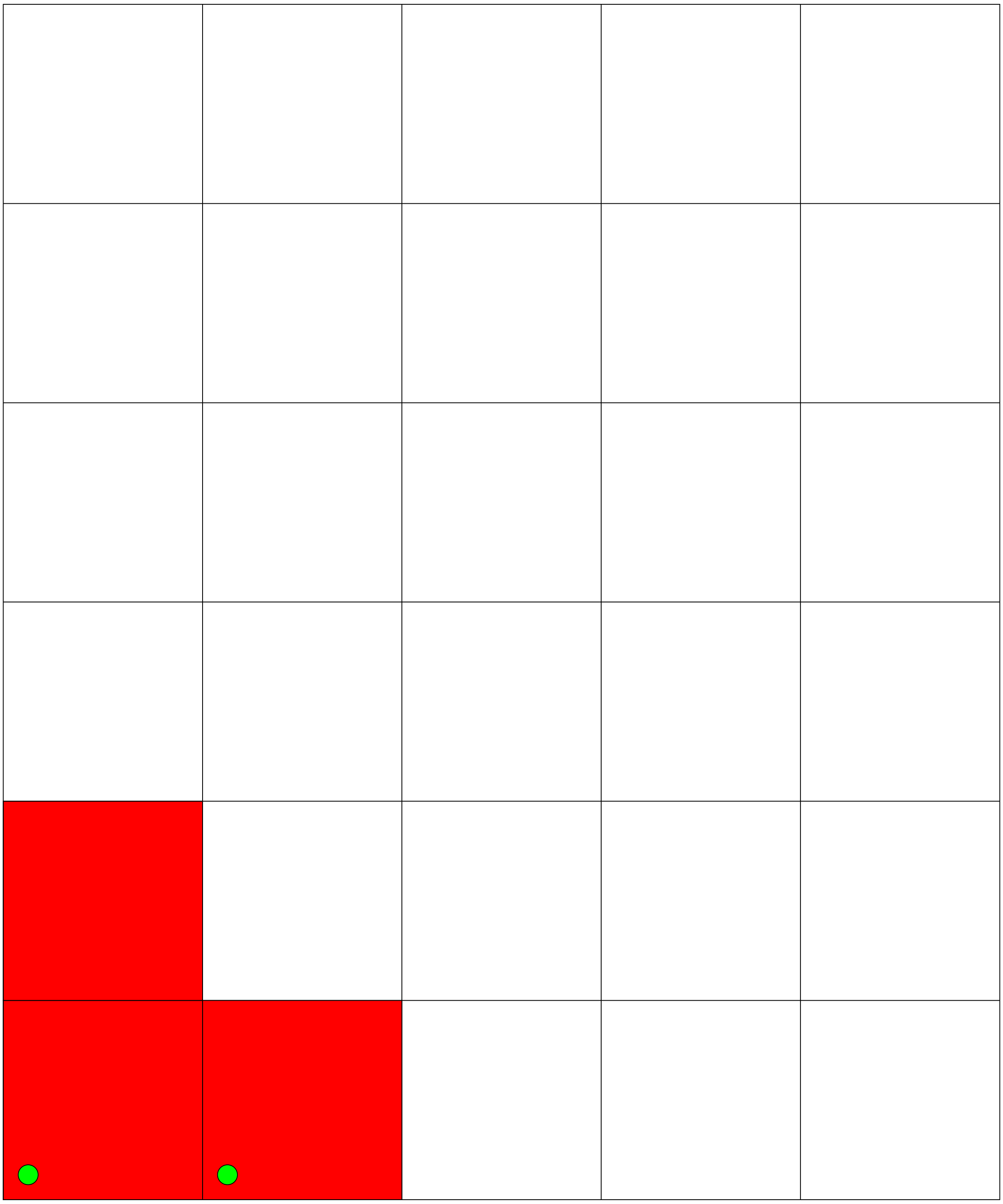


À vous d'essayer !







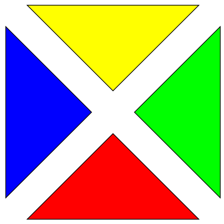


Carrés bien coloriés

Il faut manipuler des pièces pour satisfaire plusieurs contraintes, mais ce n'est pas toujours possible

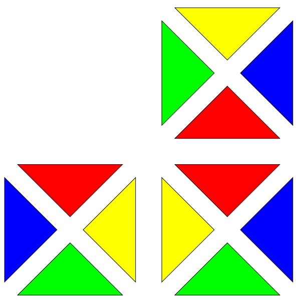
Carrés bien coloriés

On considère une collection de triangles rectangles ayant tous les mêmes dimensions et pouvant être coloriés de quatre façons différentes. Avec quatre de ces triangles, on peut former un carré. On dit que le carré est bien colorié s'il contient un triangle de chaque couleur.

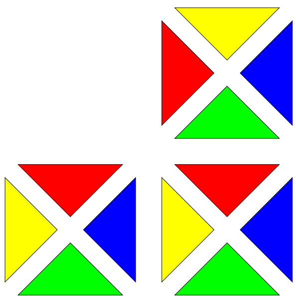


Un carré bien colorié

On forme des carrés bien coloriés que l'on place côte-à-côte. Les faces adjacentes de deux carrés voisins doivent être de la même couleur.

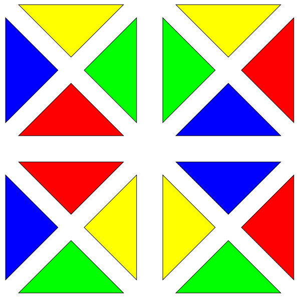


Oui

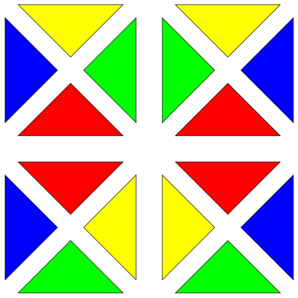


Non

Un grand rectangle (ou grand carré) est bien colorié si chacun de ses côtés est d'une seule couleur et les quatre couleurs apparaissent sur les bords.



Oui



Non

Construire (si cela est possible) :

- un grand carré de dimensions 3×3,
- un grand carré de dimensions 4×4,
- un grand rectangle de dimensions 4×3.

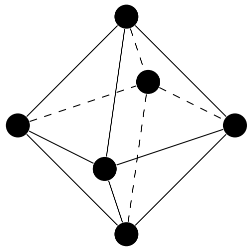
Circuits hamiltoniens sur les polyèdres

Circuits hamiltoniens sur les polyèdres

Activités

Est-il possible en suivant les côtés d'un tétraèdre de faire un « circuit » qui part d'un sommet et y revient en passant par tous les sommets une et une seule fois ? et avec un cube ? plus généralement avec l'un des cinq polyèdres réguliers (convexes) de Platon ? avec un ballon de foot ?

On commence par tester sur l'objet physique puis lorsqu'il devient trop difficile de se repérer ou de mémoriser le chemin, on adopte une description par un graphe planaire.

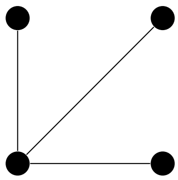


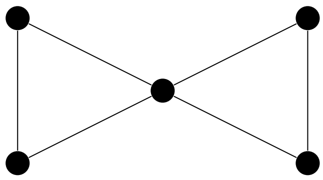
Mathématiques

▷ Un circuit passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois est hamiltonien (d'après William Rowan Hamilton qui avait considéré ce jeu pour l'icosaèdre en 1856).

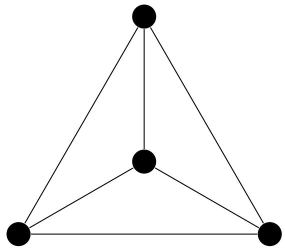
▷ Il n'existe pas de caractérisation pratique des graphes hamiltoniens (problème algorithmiquement difficile) mais de nombreuses conditions nécessaires.

▷ Il est facile de construire un graphe sans circuit hamiltonien.

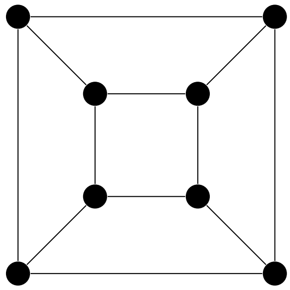




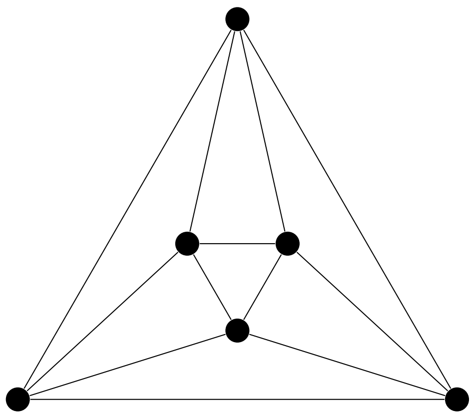
Tétraèdre



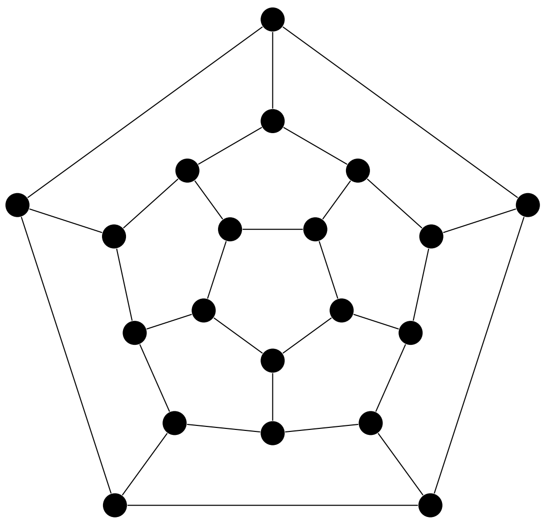
Cube



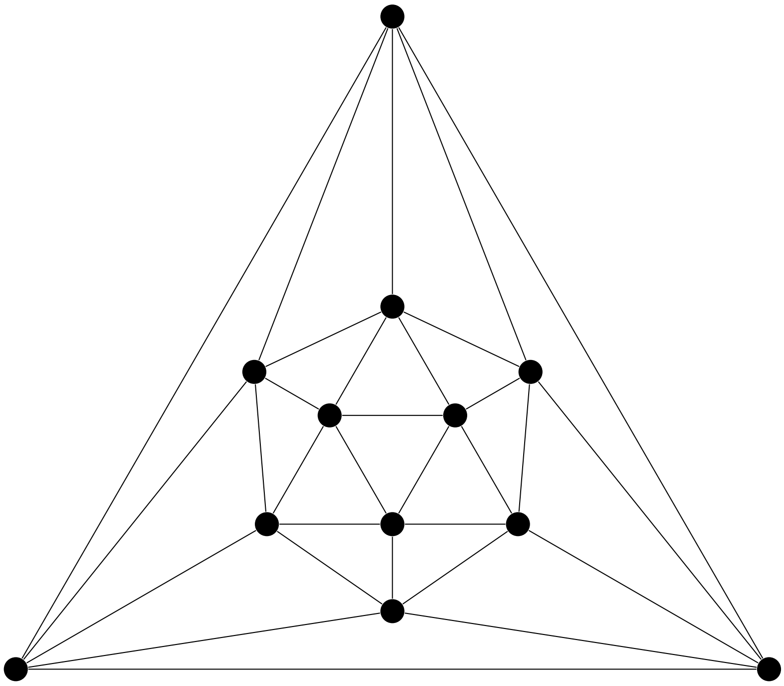
Octaèdre



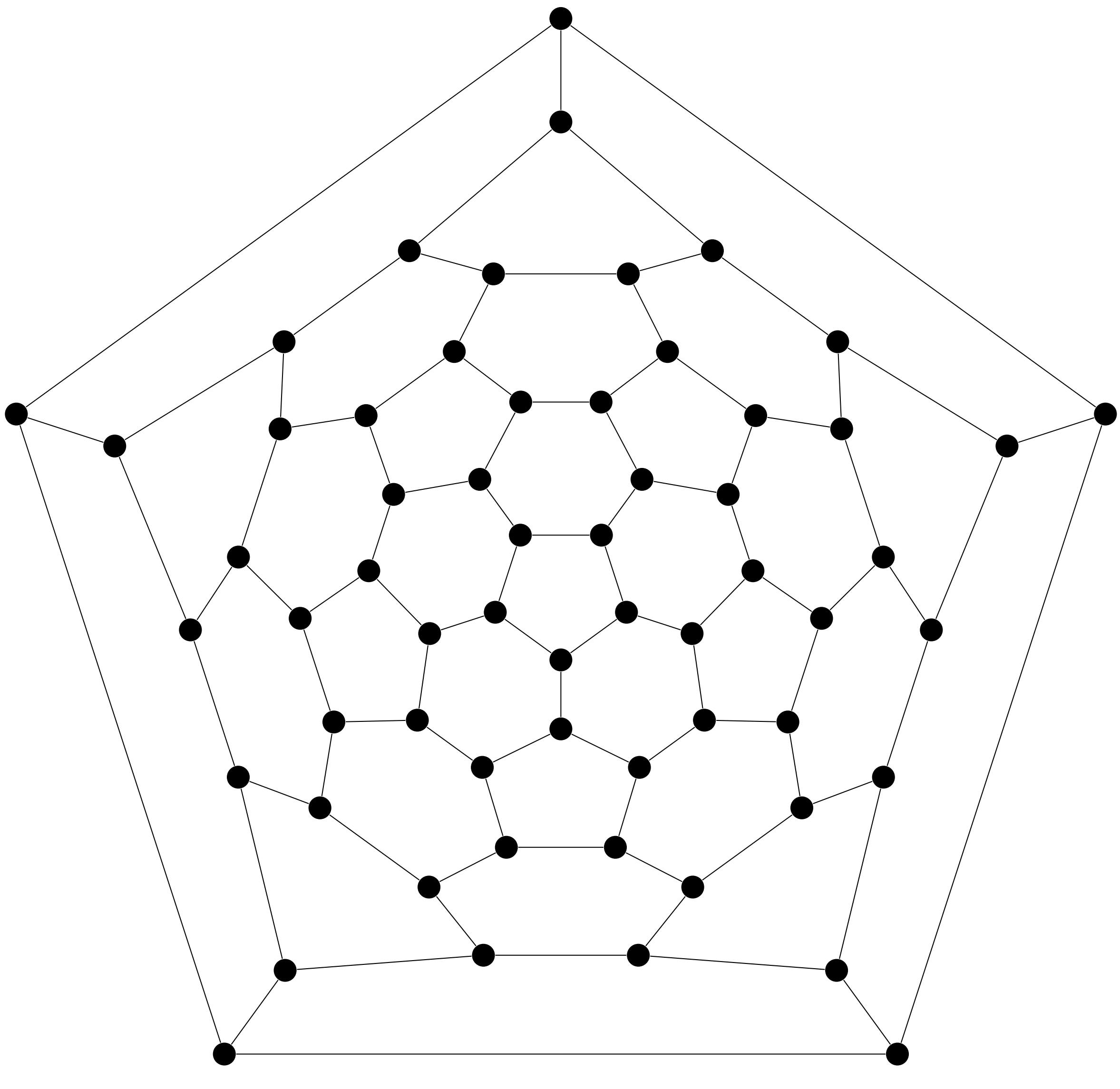
Dodécaèdre



Isocaèdre



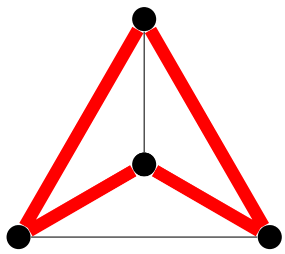
Icosaèdre tronqué (Football)



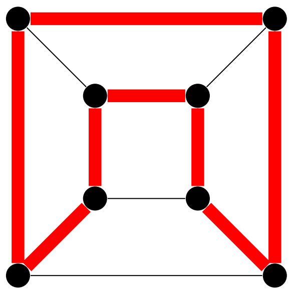
Des solutions

Ci-dessous, on montre pour chacun des graphes précédents un chemin hamiltonien. Les solutions ne sont en général pas uniques.

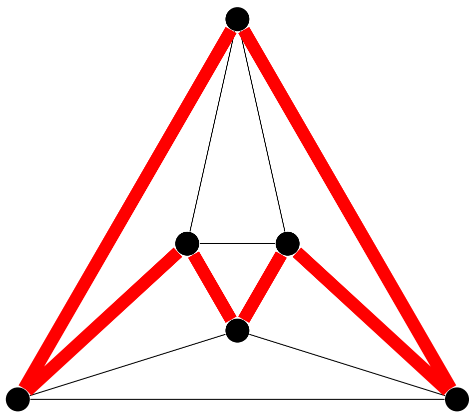
Tétraèdre



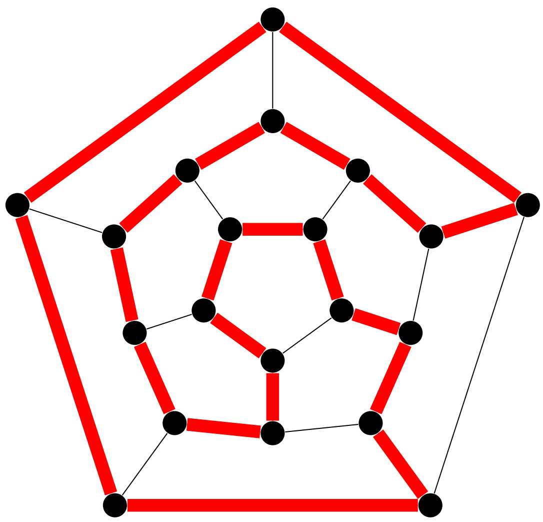
Cube



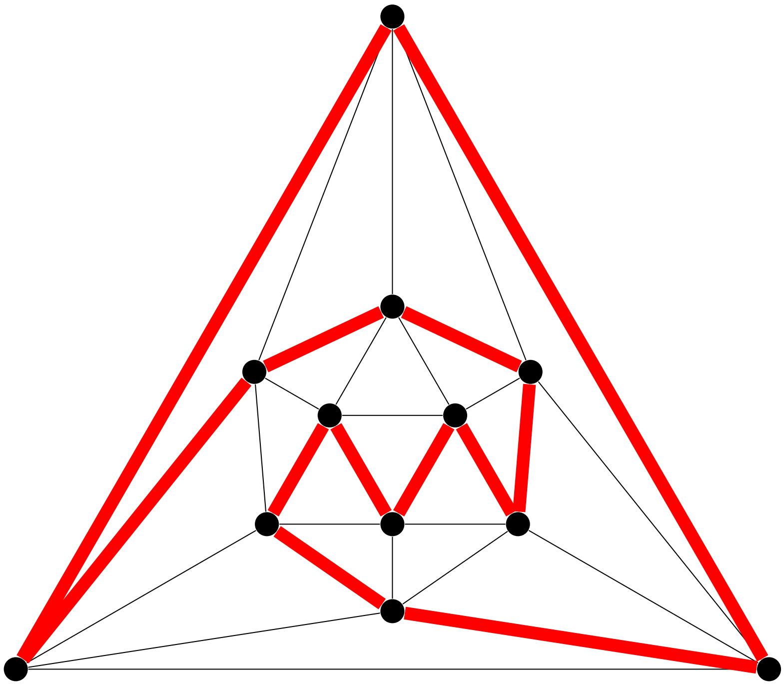
Octaèdre



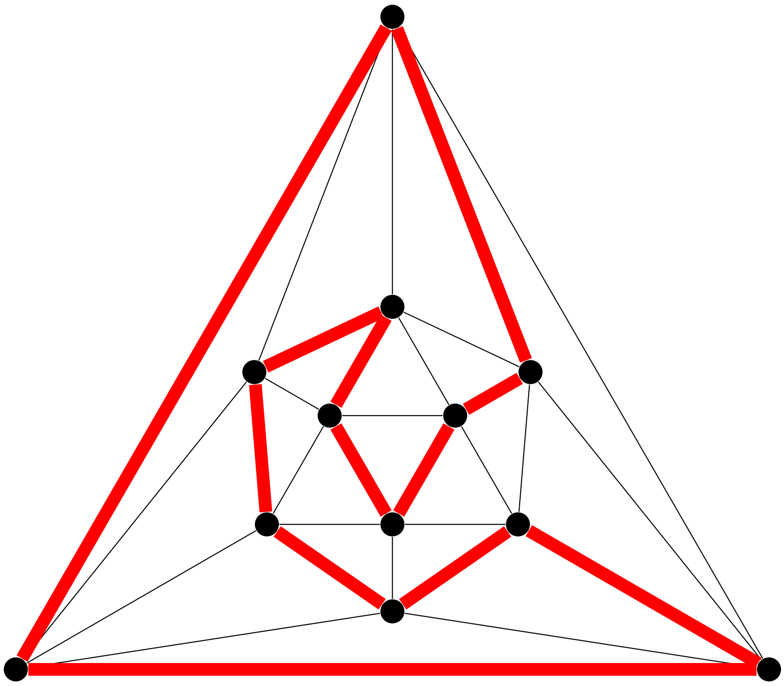
Dodécaèdre



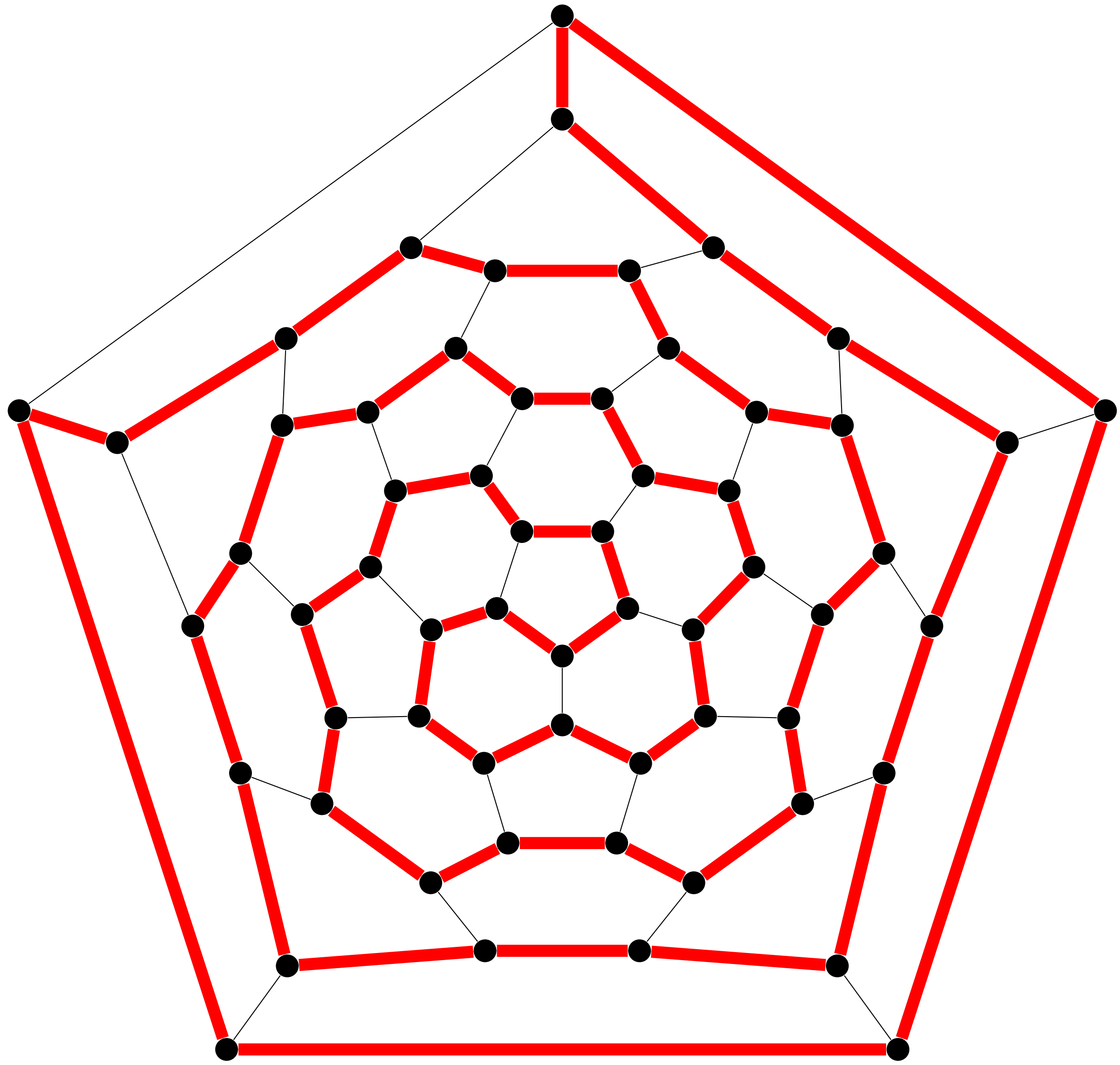
Isocaèdre



Voici un autre dessin d'un chemin hamiltonien pour ce graphe.



Icosaèdre tronqué (Football)

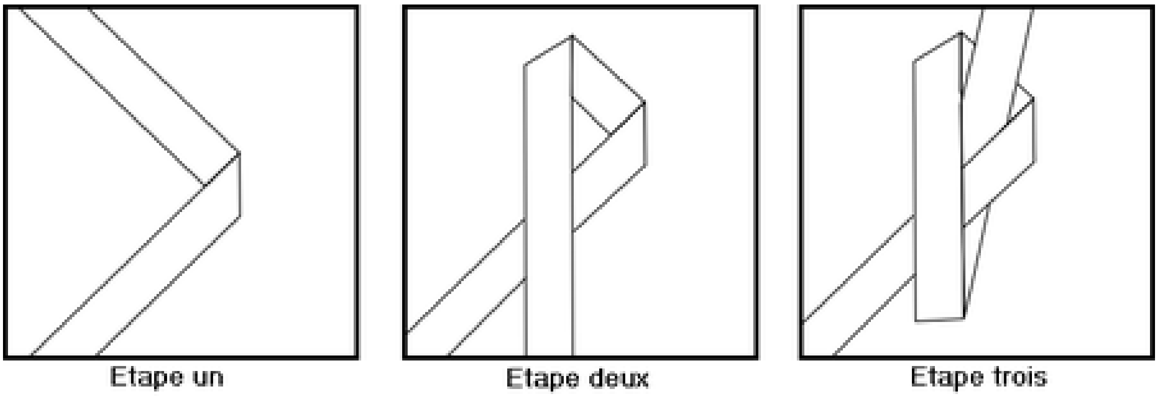


Pseudo pavages par pentagones

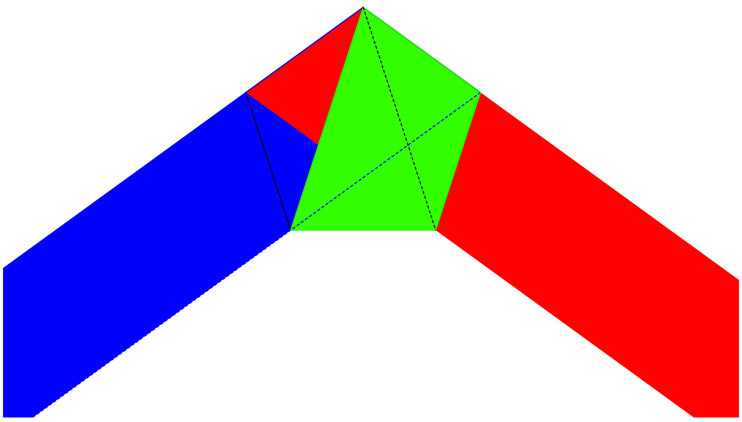
Activités

Partir d'une bande de papier et, après trois pliages et un applatissement, obtenir un pentagone régulier. Est-il possible de paver le plan avec ces polygones ?

Voici une illustration du pliage tirée de l'excellent blog *Choux romanesco, vache qui rit et intégrales curvilignes* :



Voici le résultat final où les différentes parties visibles sont représentées de couleurs différentes :



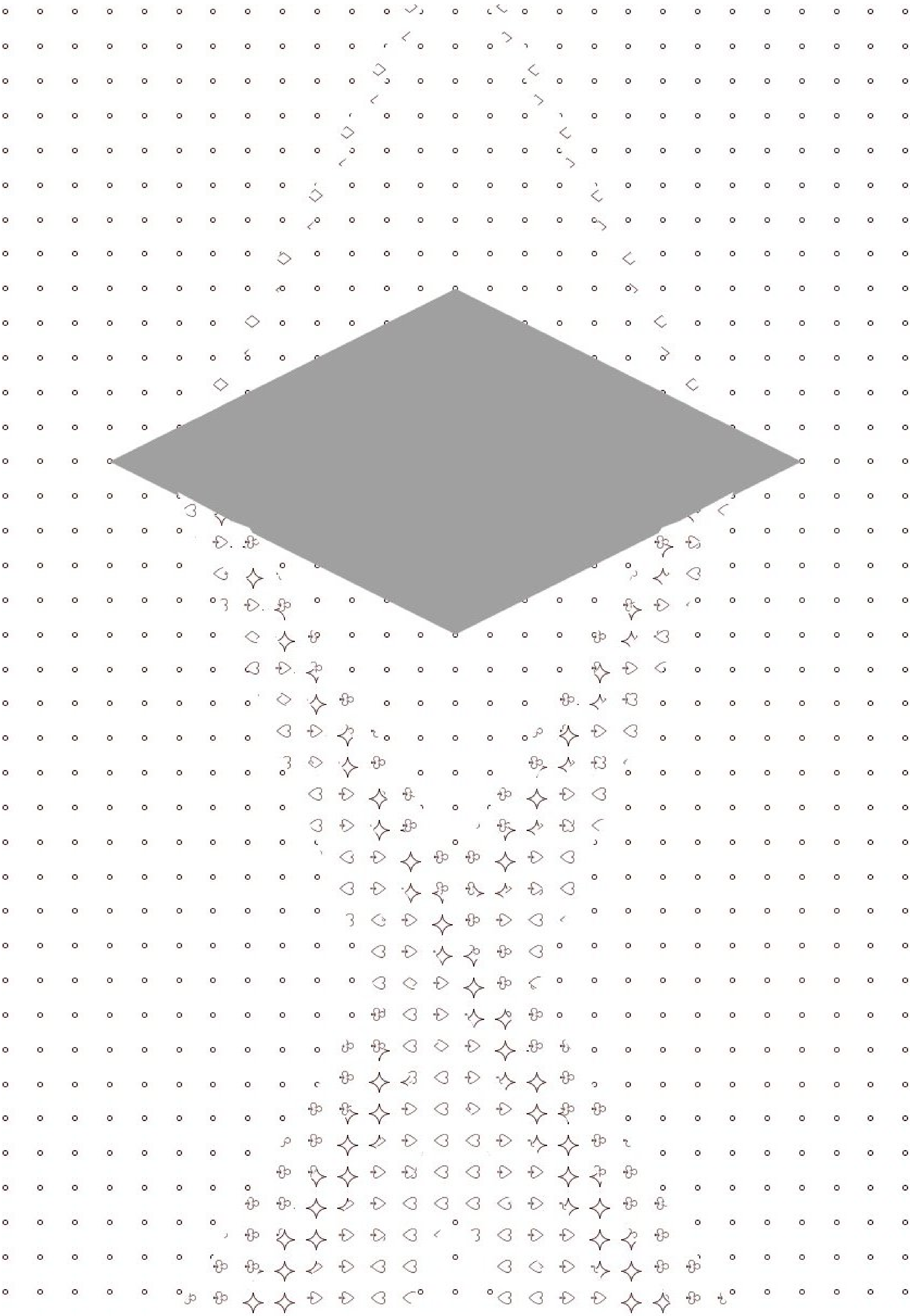
Il reste alors à découper les bandes et à « cacher » les excédents de papier dans le pentagone.

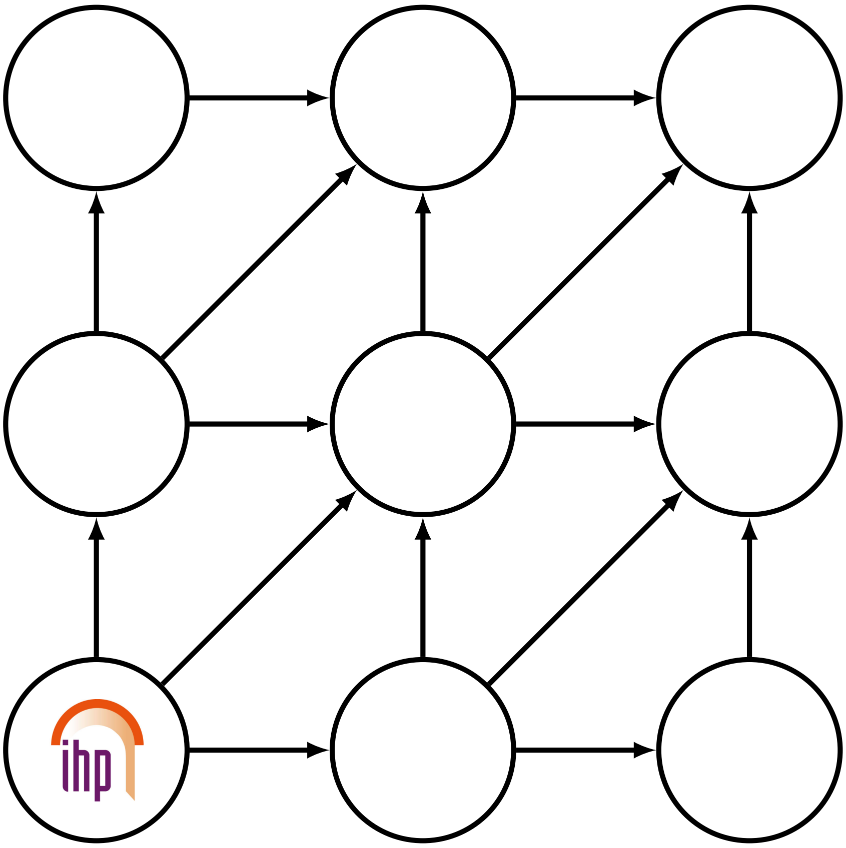
Mathématiques

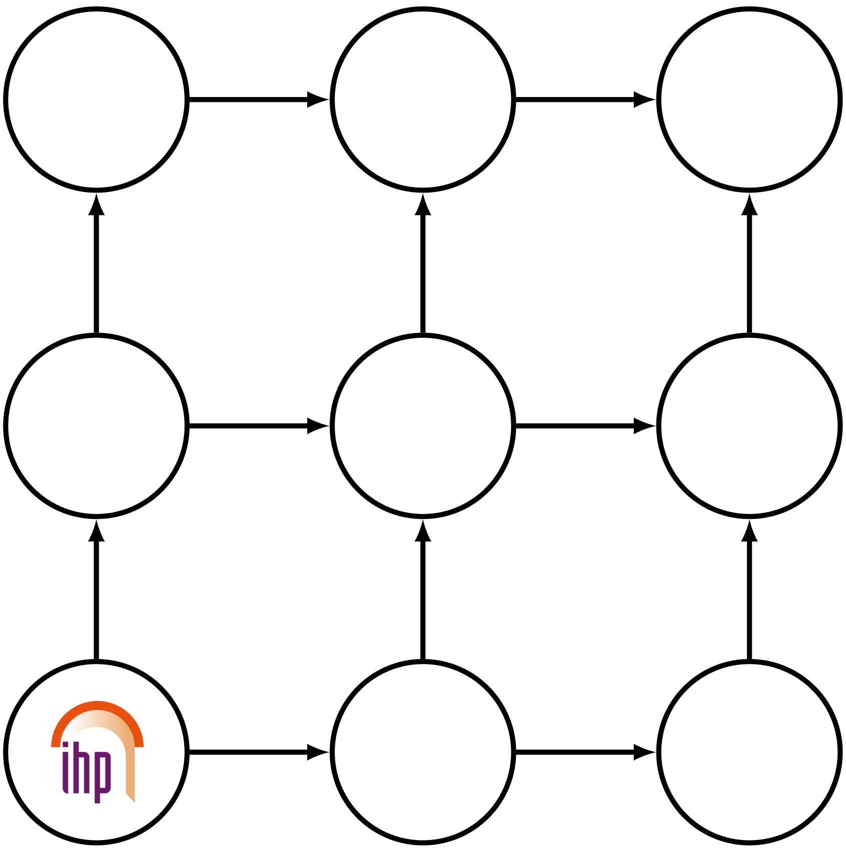
Il n'est pas possible de paver le plan avec des pentagones (la somme des angles en un point du pavage est 360 degrés alors que l'angle en un sommet du pentagone est 108 degrés) ; les seuls pavages réguliers avec des polygones réguliers sont obtenus avec des triangles, des carrés et des hexagones.

Activités (bis)

Se servir des pentagones de couleurs pour faire une mosaïque irrégulière selon le dessin suivant

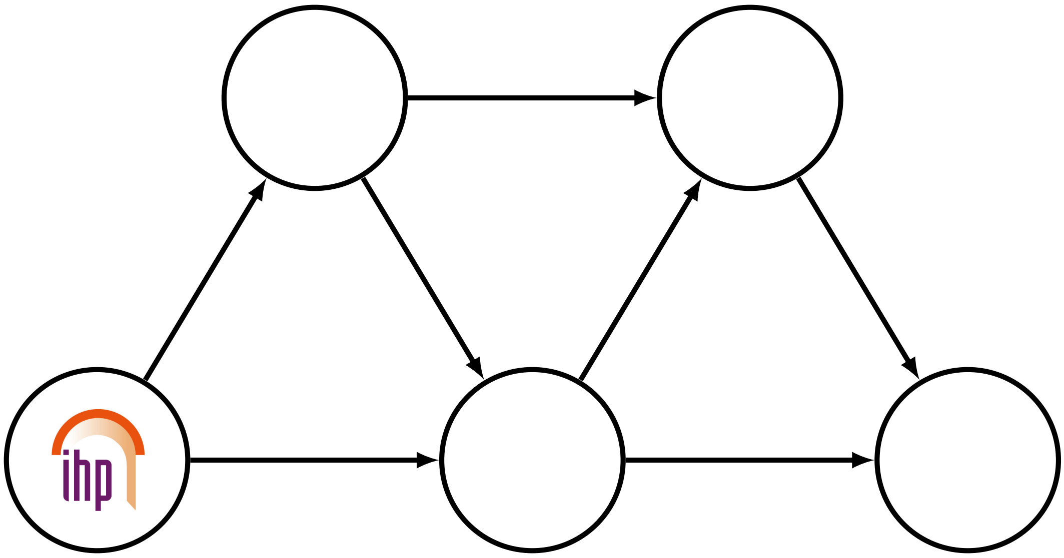


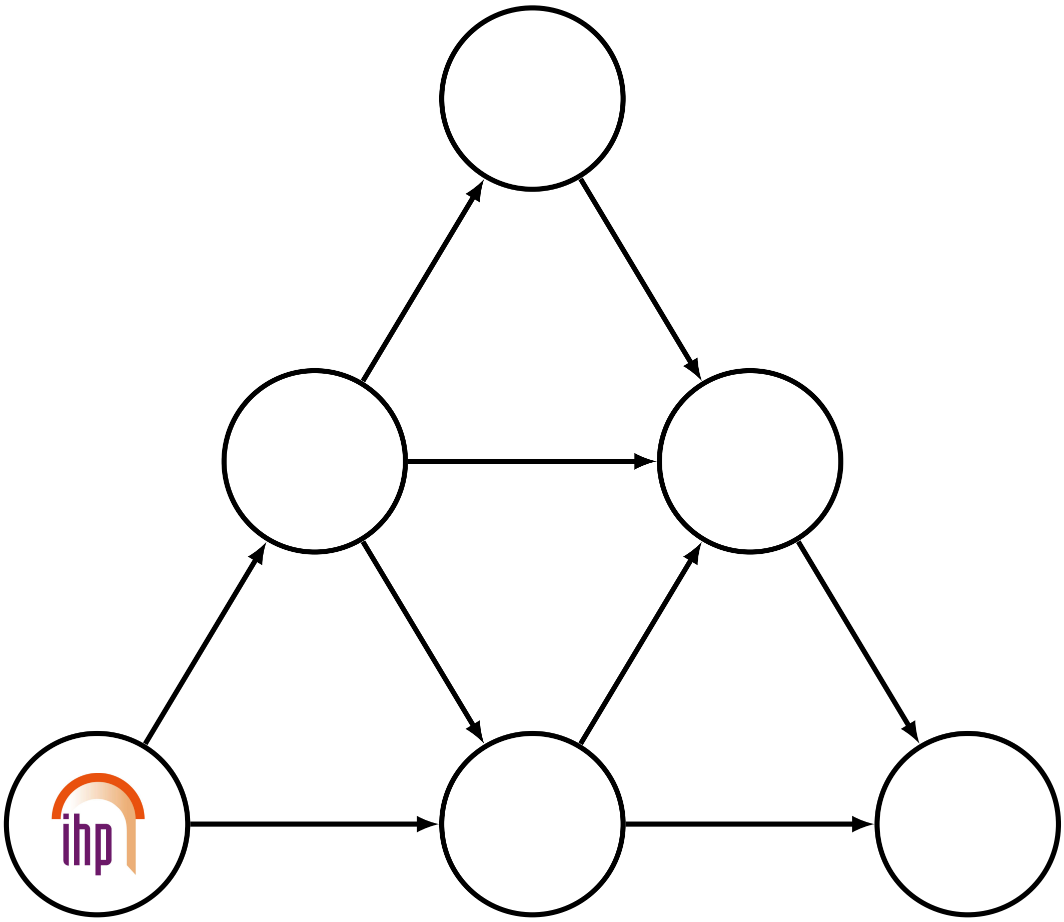




Règles du jeu

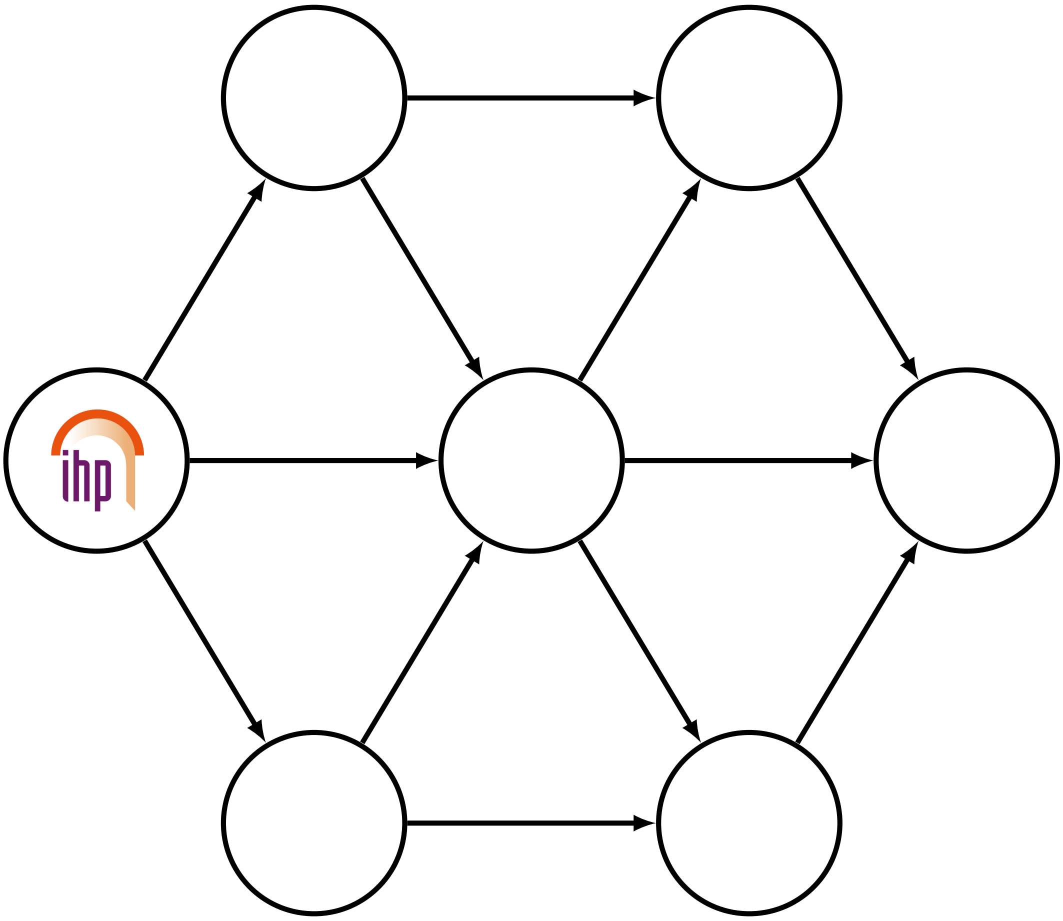
- ▷ Deux joueurs poussent à tour de rôle un jeton d'une position à une autre en suivant les flèches.
- ▷ Le premier joueur qui ne peut plus bouger le jeton en suivant l'une des flèches a perdu.

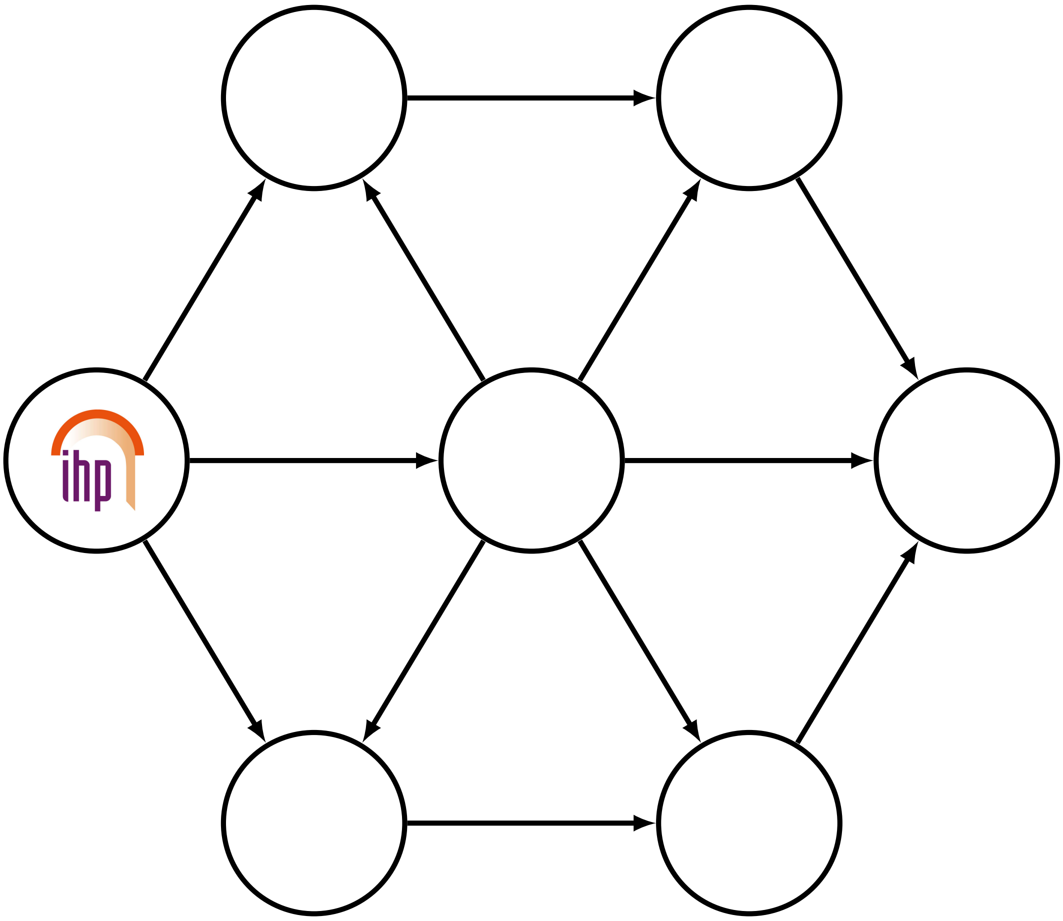




Règles du jeu

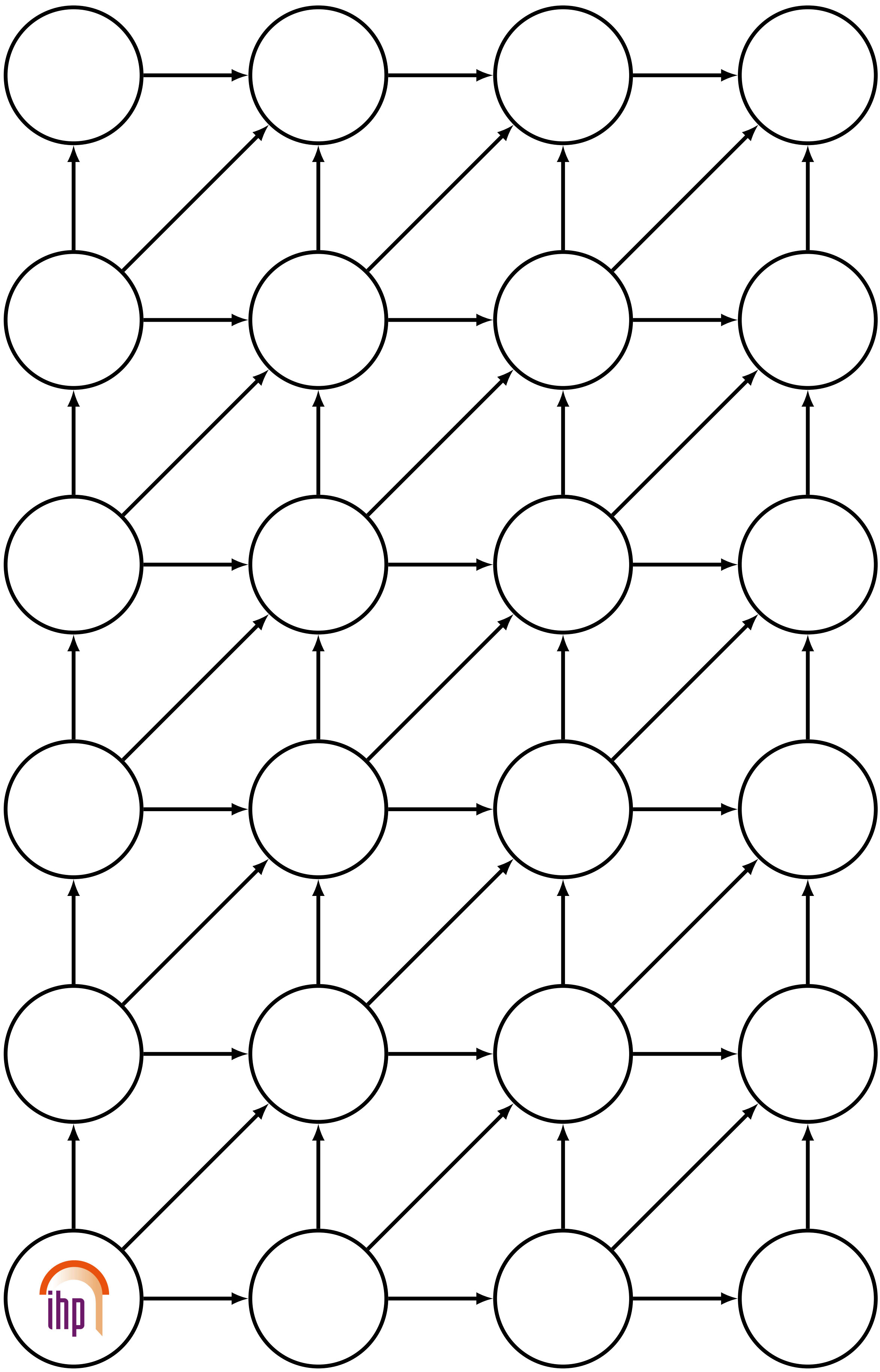
- ▷ Deux joueurs poussent à tour de rôle un jeton d'une position à une autre en suivant les flèches.
- ▷ Le premier joueur qui ne peut plus bouger le jeton en suivant l'une des flèches a perdu.





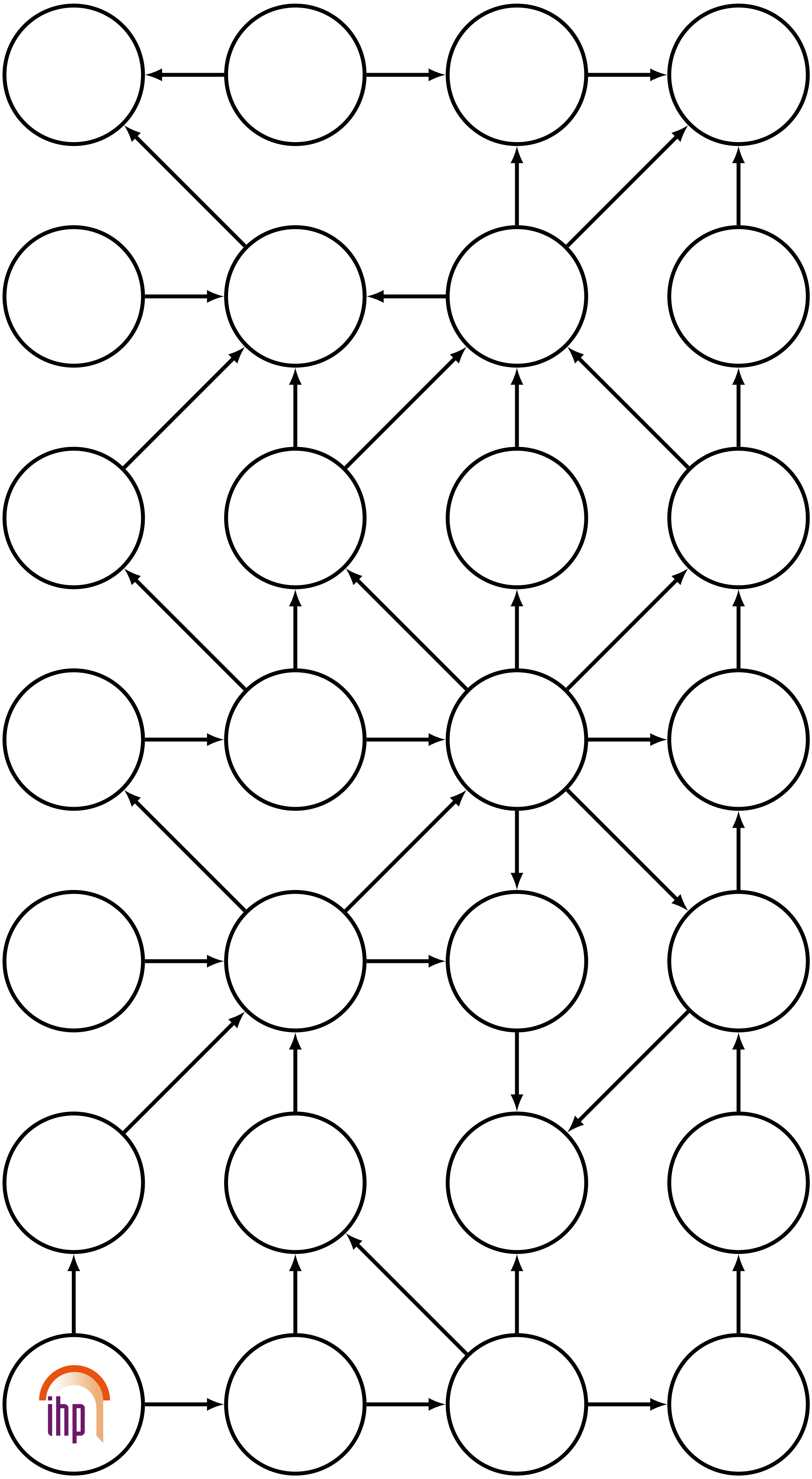
Règles du jeu

- ▷ Deux joueurs poussent à tour de rôle un jeton d'une position à une autre en suivant les flèches.
- ▷ Le premier joueur qui ne peut plus bouger le jeton en suivant l'une des flèches a perdu.



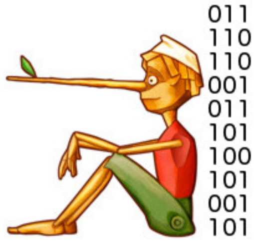
Règles du jeu

- ▷ Deux joueurs poussent à tour de rôle un jeton d'une position à une autre en suivant les flèches.
- ▷ Le premier joueur qui ne peut plus bouger le jeton en suivant l'une des flèches a perdu.



▹ Deux joueurs poussent à tour de rôle un jeton d'une position à une autre en suivant les flèches.
▹ Le premier joueur qui ne peut plus bouger le jeton en suivant l'une des flèches a perdu.

Qui est-ce ?



Une introduction aux codes correcteurs d'erreurs

Sur une feuille sont dessinés des personnages, qui se distinguent selon 4 éléments, qu'ils possèdent ou non : des lunettes, une moustache, un chapeau, des cheveux. Tous les personnages sont différents (par exemple, il ne peut pas y en avoir deux avec des lunettes, pas de moustache ni de chapeau et des cheveux). Un joueur choisit secrètement un des personnages. L'autre joueur doit deviner duquel il s'agit en posant des questions, auxquelles l'autre ne peut répondre que par « oui » ou « non », du type « a-t-il des cheveux ? ». Tous les personnages possibles sont dessinés dans le jeu.

1. **Combien de personnages y a-t-il ?**

   $2^4 = 16$. *Les puissances ne sont vues qu'en quatrième, au niveau jaune on dira* $2 \times 2 \times 2 \times 2$.

2. **Combien faut-il poser de questions pour être sûr de pouvoir trouver ?**

   On pose autant de questions qu'il y a de critères, soit 4 questions.

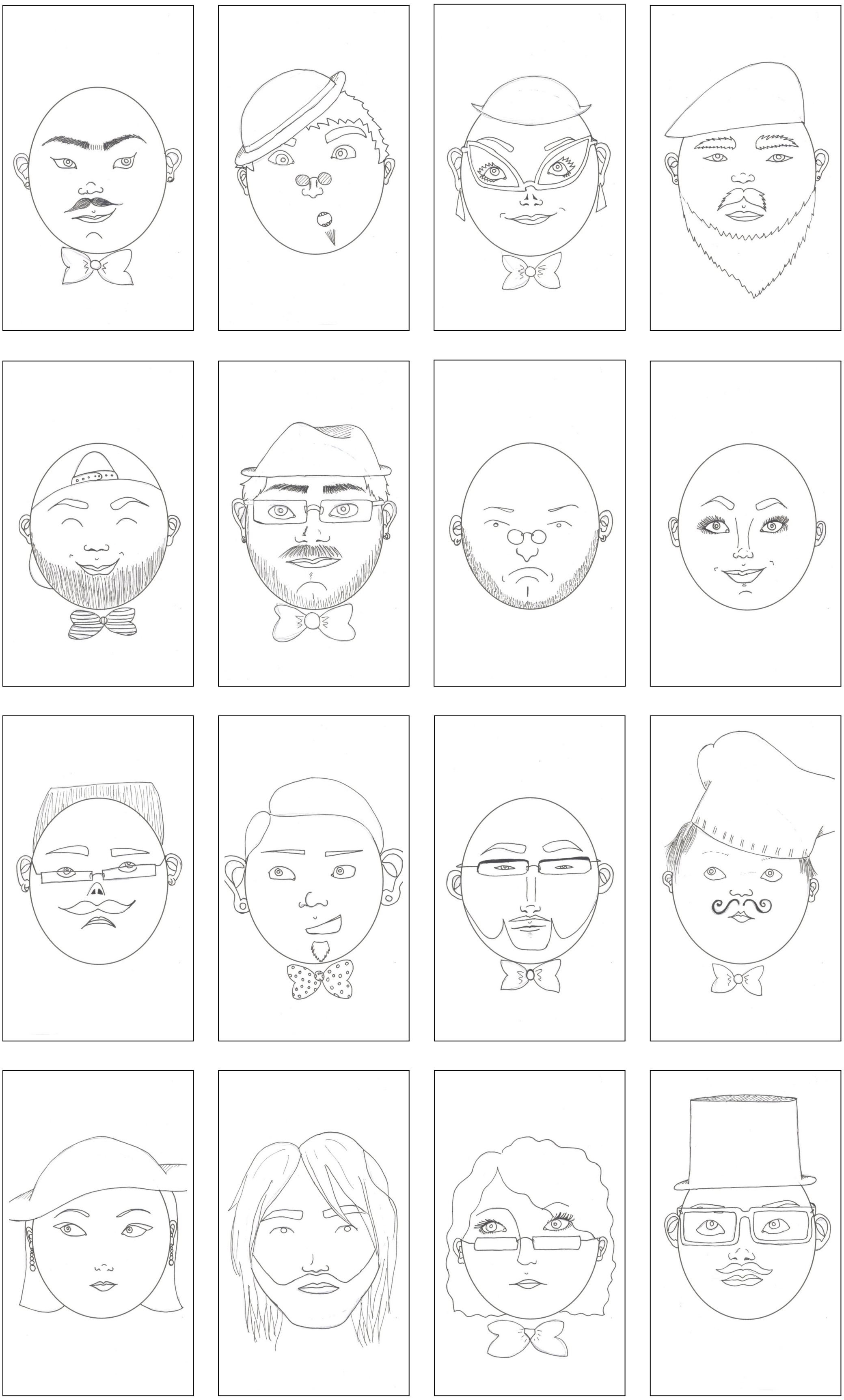
3. **On rajoute maintenant des éléments sur certains de ces personnages : boucle d'oreille, barbe, nœud papillon. Combien de questions faut-il poser pour être sûr de pouvoir trouver ?**

   Cela ne change rien... toujours les 4 mêmes questions !

On joue à ce jeu avec les éléments supplémentaires et en rajoutant la règle suivante : le joueur qui a choisi le personnage secret a le droit de mentir au plus une fois en répondant aux questions. Ces questions sont, dans l'ordre :

(1) A-t-il des lunettes ? **(2) A-t-il une moustache ?** **(3) A-t-il un chapeau ?**
(4) A-t-il des cheveux ? **(5) A-t-il des boucles d'oreille ?** **(6) A-t-il une barbe ?**
(7) A-t-il un nœud papillon ?

On peut lancer une partie sur l'ordinateur (jeu.html, à ouvrir de préférence avec Firefox, éventuellement Chrome, éviter Internet explorer et Safari). Il y a aussi un jeu de cartes (plus grandes) qu'on peut utiliser si les dessins sur l'écran sont trop petits ou pour jouer sans ordinateur.



On représente un personnage par un élément de ${\mathbf{F}_2}^7$ *:* $(x_1,\ldots,x_7)$ *avec* $x_i = 1$ *si la réponse à la* *question i est « oui », 0 sinon. Les personnages représentés dans le jeu sont les 16 éléments du* $\mathbf{F}_2$*-espace vectoriel engendré par* $(1,0,0,0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1,0,1)$, $(0,0,1,0,0,1,1)$ *et* $(0,0,0,1,1,1,1)$.

4. **Quel est le nombre minimal de différences entre deux personnages distincts du jeu ?**

   Il y en a 3. On ne va pas demander de vérifier tous les couples de personnages mais l'admettre. Ce qui est important c'est plutôt de comprendre la question suivante.

5. **Pourquoi cela permet-il de deviner le personnage secret, même si le joueur a menti une fois ?**

   Quand on ment à une question, on décrit un personnage (fictif) qui a une seul différence avec le personnage qu'on avait choisi. Et ce personnage fictif a au moins 2 différences avec les 15 autres personnages du jeu. Remarque : si deux personnages du jeu ne présentaient que 2 différences, on pourrait en mentant une fois décrire un personnage qui n'aurait qu'une différence avec ces deux personnages, et on n'aurait aucun moyen de savoir quel était le bon.

   Le niveau jaune s'arrête là mais si l'enfant a envie de continuer, on peut lui proposer la méthode de codage d'un personnage avec des 0 et des 1 présentée dans le niveau orange. On peut également expliquer que les données informatiques sont formées de 0 et de 1 et que lors d'une communication il peut y avoir des erreurs (comme quand on joue au téléphone arabe) qu'on aimerait pouvoir corriger, tout comme on a su trouver un mensonge dans notre jeu.

Voyons maintenant comment jouer à ce jeu avec mensonge, sans l'aide de l'ordinateur !

On représente chaque personnage par une suite de sept chiffres, 0 ou 1. Le troisième personnage, celui qui a des lunettes, pas de moustache, un chapeau, des cheveux, pas de boucle d'oreille, une barbe, pas de nœud papillon, sera ainsi représenté par 1011010**. On code les réponses du joueur aux questions de la même façon, par exemple si j'ai choisi le personnage numéro 3 et que je mens à la question « a-t-il des boucles d'oreille ? », ma réponse sera** 1011110**.**

Remarque : Le code correspondant à une carte est inscrit au dos de la carte.

On reçoit une réponse. Pour savoir si elle est correcte ou mensongère, on va calculer trois nombres, les « syndromes » qui valent chacun 0 ou 1.

s_1 **: on garde un chiffre sur deux** $\square\times\square\times\square\times\square$ **on en fait la somme.** s_1 **vaut 0 si la somme est paire, 1 si elle est impaire.**

s_2 **:** $\times\square\square\times\square\square\times$**, on fait la somme,** s_2 **vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.**

s_3 **:** $\times\times\times\square\square\square\square$ **(que les quatre derniers chiffres), on fait la somme,** s_3 **vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.**

Exemple : Si la réponse obtenue est 0011110**, on a**

$$s_1 = 0, \; s_2 = 1, \; s_3 = 1.$$

Notons H *la matrice suivante, à coeffcients dans* $\mathbf{F}_2$ *:*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si la réponse obtenue est $x = (x_1, \ldots, x_7)$, les syndromes associés sont donnés par le produit matriciel Hx.

6. **Le joueur répond sans mensonge. Calculer, pour chaque personnage, s_1, s_2 et s_3.**

   Répartir la tâche dans le groupe, chacun en calcule 1 ou 2 ! Dans tous les cas, on trouve $s_1 = s_2 = s_3 = 0$.

   En effet, le sous-espace vectoriel des (codes des) personnages du jeu est exactement le noyau de H (on a construit H pour cela).

7. **Que valent s_1, s_2 et s_3 si on ment à la première question et pas aux autres ?**

   Il va être important de réussir à faire comprendre que la réponse à cette question ne dépend pas du personnage choisi.

   Pour le calcul de s_1, on regarde □×□×□×□. On a vu que si on ne mentait pas, s_1 valait 0. Si on ment à la première question, on change la valeur du premier bit (0 si c'était 1, 1 si c'était 0) et pas des autres, et s_1 vaut donc 1.

   Pour le calcul de s_2, ×□□×□□×. Si on ne ment pas, s_2 vaut 0. Si on ment à la première question, on change la valeur du premier bit (0 si c'était 1, 1 si c'était 0) et pas des autres, ce qui ne change pas s_2 qui vaut toujours 0.

   Pour s_3, comme pour s_2, une modification du premier bit ne change rien, on a toujours $s_3 = 0$.

   Explication en termes d'algèbre linéaire (sauf avec un expert, on évite bien entendu de parler de cette explication) : si le personnage choisi est $m \in \mathbf{F}_2^7$ et qu'on ment à la question i, le personnage fictif décrit est $m + e_i$ où e_i désigne le i-ième vecteur de la base canonique. Le syndrome obtenu est donc $H(m+e_i) = Hm + He_i = He_i$ qui est égal à la i-ième colonne de H. En particulier, si on ment à la première question, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$.

8. **Et si on ment seulement à la cinquième question ?**

   Dans ce cas, (s_1, s_2, s_3) est égal à la cinquième colonne de H. On peut donner une explication du même type qu'à la question précédente, pour trouver $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ et $s_3 = 1$.

9. **Comment le tableau ci-dessous permet-il de découvrir facilement à quelle question le joueur a menti ?**

   On calcule les syndromes. S'ils ne valent pas tous 0, on regarde le numéro de la colonne correspondant, il donne le numéro de la question à laquelle on a menti. Si les syndromes sont tous les trois nuls, le joueur n'a pas menti. On a construit une sorte de détecteur de mensonge !

	1	2	3	4	5	6	7
s_1	1	0	1	0	1	0	1
s_2	0	1	1	0	1	1	0
s_3	0	0	0	1	1	1	1

Le principe sur lequel repose ce jeu est en fait à la base d'applications très utiles, pour transmettre ou stocker des données. Disons que les données transmises sont des paquets de 0 et de 1. Lors de la transmission, que ce soit par ondes radio, par câble ou autre, des erreurs sont susceptibles de se produire et le message reçu n'est plus parfaitement conforme à celui qui a été envoyé (les erreurs jouent le rôle des mensonges de notre jeu). En envoyant, en plus de l'information de départ, une information supplémentaire

redondante, on va être capable de dire s'il y a eu ou non des erreurs lors de la transmission et de les corriger s'il n'y en a pas eu trop. C'est exactement le même principe que quand des pilotes d'avion disent « Alpha, Charlie, Tango » pour dire « A, C, T » mais avec plus d'algèbre !

Voici quelques informations supplémentaires sur ce qu'est un code correcteur. L'espace vectoriel ${\mathbf{F}_2}^n$ *est muni de la distance suivante (dite de Hamming) : la distance entre deux vecteurs est égale au nombre de composantes qui diffèrent entre ces deux vecteurs. Un code correcteur est un sous-espace vectoriel* $\mathscr{C}$ *de* ${\mathbf{F}_2}^n$ *(ici* $n = 7$ *et le sev est de dimension 4) et on définit sa* distance minimale d *comme la plus petite distance entre deux vecteurs distincts de* $\mathscr{C}$*. Les éléments du code* $\mathscr{C}$ *sont les messages que l'on peut envoyer (via un canal). Si* t *erreurs se produisent lors de la transmission, c'est-à-dire si* t *bits sont modifiés, le mot reçu est à distance* t *du mot qui a été envoyé. Si la distance minimale vérifie* $d \geqslant 2t + 1$*, les boules de centre les mots de* $\mathscr{C}$ *et de rayon* t *ne s'intersectent pas donc le mot reçu est dans une seule de ces boules et on peut déterminer quel mot a été envoyé. Dans notre exemple* $d = 3$ *et on peut corriger* $\lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor = 1$ *erreur.*

10. **Que va-t-il se passer si le joueur ment deux fois ?**

    Regardons les syndromes qu'on peut obtenir, c'est-à-dire toutes les colonnes du tableau. Il y en a 7, soit tous les vecteurs non nul de $(\mathbf{F}_2)^3$*. Par conséquent, quelle que soit la réponse que le joueur donne (avec autant de mensonges qu'il veut), si on croit qu'il a joué le jeu et menti au plus une fois, en faisant les calculs on tombe sur un syndrome qui est bien dans le tableau et on corrige en croyant qu'il n'y a eu qu'un mensonge. On ne pourra pas détecter s'il y a eu trop d'erreurs et on donnera un personnage qui ne pourra pas être le bon !*

11. **Voyez-vous comment, en ajoutant une caractéristique sur certains des 16 personnages (un piercing dans le nez, par exemple) et une question correspondante, on pourrait détecter si le joueur a triché et menti deux fois ?**

    On peut introduire ce que l'on appelle un « bit de parité » : chaque personnage était codé par une suite de sept bits, on en rajoute un huitième qui est égal à 0 si le nombre de 1 dans le code du personnage était pair, 1 si le nombre de 1 était impair (ainsi, la somme des 8 bits d'un personnage est toujours paire). Dans le jeu, on met un piercing si ce bit vaut 1, pas de piercing si c'est 0.

    La somme des 8 bits de la réponse vaut alors 0 si et seulement si le nombre de mensonges est pair.

    On fait comme précédemment, on calcule le syndrome à l'aide des 7 premiers bits. S'il n'est pas nul, on fait la somme des bits : si elle vaut 1, il y a eu un nombre impair de mensonges (si c'est bien un seul, on sait corriger), si elle vaut 0 on sait qu'il y a eu au moins deux mensonges (qu'on n'est par contre pas en mesure de corriger).