Colle 3 – Théorie des groupes

Exercice 1 Soit l'application $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \times)$ définie par $f(n) = 2^n$.

1. Montrer que f est un homomorphisme de groupes.
2. Calculer l'image de f.
3. Déterminer le noyau de f.
4. f est-elle injective ?
5. f est-elle surjective ?

Exercice 2 Soit $G = GL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Soit $X = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$. On considère l'action :

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ \left(g, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \mapsto & g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que pour cette action X a deux orbites.
2. Déterminer le stabilisateur de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire l'ordre de G.
4. Montrer que $\det : G \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ est surjectif. En déduire l'ordre de $SL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) := \mathrm{Ker}\,(\det)$.
5. Soient $a := -I_2$ et $b := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les ordres de a et de b. En déduire l'ordre de ab.
6. On désigne par S_n le groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Quel est l'ordre du groupe S_5 ? Montrer, en donnant des exemples, que dans S_5 il y a des éléments d'ordre $2, 3, 4, 5, 6$. Montrer que S_5 ne contient pas d'éléments d'ordre 8 ou 10.
7. En déduire que $SL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \ncong S_5$.

Exercice 3 On se propose de déterminer les sous groupes distingués de S_4.

1. Soit $F_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Montrez que F_4 est un sous-groupe distingué dans S_4.
2. On se propose de démontré que F_4 est le seul sous-groupe distingué d'ordre 4 dans S_4.
   (a) Soit N un sous-groupe distingué d'ordre pair dans S_4. Montrez que N contient F_4.
   (Indication : On pourra utiliser le théorème de Cauchy.)
   (b) Conclure.
3. Soit M un sous-groupe distingué et propre dans S_4 d'ordre divisible par 3.
   (a) Montrez que $|M| = 12$ ou 24.
   (b) Motrer que $M \cap A_4$ est un sous groupe distingué d'ordre divisible par 3.
   (c) En déduire que A_4 et F_4 sont les seuls sous-groupes distingués non-triviaux dans S_4.
   (Rappelons que A_4 est le sous groupe alterné de S_4)

Exercice 4 [**Groupe diédral**] Dans le plan affine euclidien E, soit P un polygone convexe régulier à n côtés ($n \geq 3$), de sommets $A_0, \ldots, A_{n-1}$.

$$\mathbb{D}_n = \{f : E \to E,\ f \text{ affine },f(P) = P\}$$

1. Montrer que $\mathbb{D}_n$ est un sous-groupe fini de $Iso(E)$. On l'appelle le **groupe diédral d'ordre n.**
2. Dans $\mathbb{D}_n$, déterminer le stabilisateur d'un sommet A_i de P. En déduire le cardinal de $\mathbb{D}_n$.
3. Décrire les éléments de $\mathbb{D}_n$ et montrer que $\mathbb{D}_n =< r, s >$ avec r, s tels que :

$$r^n = Id_E, \quad s^2 = Id_E, \quad (sr)^2 = Id_E$$

4. Soit G un sous-groupe fini de $Iso(E)$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{D}_n$.