Colle 2 – Théorie des groupes

Exercice 1 Soit G un groupe et A une partie non vide de G. On appelle normalisateur de A et centralisateur de A l'ensemble les ensembles :

$$N_G(A) = \{g \in G | \ \ gAg^{-1} = A\}, \qquad C_G(A) = \{g \in G| \ \ \forall a \in A, \ gag^{-1} = a\}$$

1. Montrer que $N_G(A)$ et $C_G(A)$ sont des sous-groupes de G.
2. Montrer que $C_G(A)$ est un sous-groupe distingué de $N_G(A)$.
3. Montrer que si H est un sous-groupe distingué de G, alors $C_G(H)$ est aussi un sous-groupe distingué de G.

Exercice 2 Soit $f \in Aut(G)$ pour G un groupe. Soit $H = \{h \in G \ | \ \ f(h) = h\}$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de G.
2. Montrer que si H contient au moins la moitié des éléments de G, alors f est l'identité.

Exercice 3 Soit $G = GL_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées réelles de taille 2 inversibles, muni de la loi de produit des matrices. On considère les éléments de G :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les ordres de s et r
2. Montrer que $srs^{-1} = r^{-1}$.
3. Soit $\mathbb{D} = \langle s, r\rangle$ le sous-groupe engendré par s et r et $S = \langle s\rangle$, $R = \langle r\rangle$ les sous-groupes cycliques de $\mathbb{D}$ engendrés par s, réspectivement r :
   (a) Montrer que R est distingué dans $\mathbb{D}$.
   (b) Montrer que S n'est pas distingué dans $\mathbb{D}$.
4. Trouver le centralisateur $C_G(R) = \{g \in G| \ \ \forall x \in R, \ gx = xg\}$ de R.
5. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^*$ l'application qui à tout élément g de $\mathbb{D}$ attache le déterminant : $f(g) = \det(g)$ de la matrice inversible g.
   (a) Montrer que f est un homomorphisme de groupes. ($\mathbb{R}^*$ est munit de sa structure de groupe multiplicatif.)
   (b) Calculer l'image $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{D})$ de f.
   (c) Déterminer le noyau de f, $\operatorname{Ker} f$.
   (d) En déduire l'ordre du groupe $\mathbb{D}/R$ et celui de $\mathbb{D}$.

Exercice 4 On considère la permutation $\sigma = (16)(1547)(2137)(136)$ du groupe symétrique $\mathcal{S}_7$.

1. Calculer la signature de σ.
2. Donner la décomposition de σ en produits de cycles disjoints.
3. Calculer l'ordre de σ, puis l'ordre de σ^{10}.
4. Donner la décomposition de σ^{27} et de σ^{26} en produits de cycles disjoints.

Exercice 5 On se propose de déterminer les sous groupes distingués de S_4.

1. Soit $F_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Montrez que F_4 est un sous-groupe distingué dans S_4.
2. On se propose de démontré que F_4 est le seul sous-groupe distingué d'ordre 4 dans S_4.
   (a) Soit N un sous-groupe distingué d'ordre pair dans S_4. Montrez que N contient F_4. (Indication : On pourra utiliser le théorème de Cauchy.)
   (b) Conclure.
3. Soit M un sous-groupe distingué et propre dans S_4 d'ordre divisible par 3.
   (a) Montrer que $|M| = 12$ ou 24.
   (b) Motrer que $M \cap A_4$ est un sous groupe distingué d'ordre divisible par 3.
   (c) En déduire que A_4 et F_4 sont les seuls sous-groupes distingués non-triviaux dans S_4. (Rappelons que A_4 est le sous groupe alterné de S_4)

Exercice 6 Soit $(\mathbb{G}, \star)$ un groupe non commutatif d'ordre 21. Montrer que :

1. $\forall g, h \in \mathbb{G} \setminus \{e_{\mathbb{G}}\} : \quad g \star h = h \star g$ si et seulement si $\langle g \rangle = \langle h \rangle$.
2. $g^3 = h^3 = (g \star h)^3 = e_{\mathbb{G}}$
3. $\mathbb{G}$ a un unique sous-groupe N d'ordre 7, qui est distingué, et 7 sous-groupes d'ordre 3.

Exercice 7 Montrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.