Colle 1 – Théorie des groupes

Exercice 1 Soit $G = \{a \in \mathbb{R} |\ a > 0, a \neq 1\}$. Est-ce que l'ensemble G forme un groupe pour l'opération $a \star b = a^{\ln b}$ où on a noté $\ln x = \log_e x$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 Soit G un groupe fini dont tout les éléments sont d'ordre au plus 2. On suppose que G n'est pas réduit à $\{e\}$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que le cardinal de G est pair.
3. Pour $a \neq e$ un element de G on pose $H = \langle a \rangle$. Montrer que tout élément du groupe quotient G/H est d'ordre au plus deux.
4. Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.

Exercice 3 Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de H.

Exercice 4 Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes finis.

1. Montrer que si G' est un sous-groupe de G, alors $f(G')$ est un sous-groupe de H isomorphe à $G'/(Kerf \cap G')$.
2. En déduire que l'ordre de $f(G')$ divise les ordres de G' et de H.

Exercice 5 Soit G un groupe abélien et a et b deux éléments d'ordres finis. Montrer que ab est d'ordre fini et que l'ordre de ab divise le ppcm des ordres de a et b. Montrer que si les ordres de a et b sont premiers entre eux, l'ordre de ab est égal au ppcm des ordres de a et de b.

Exercice 6 (Ordre des groupes)

1. Soit G_1 un groupe d'ordre 31. Montrer que G_1 est un groupe cyclique.
2. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 27.
3. Soient H un groupe non abélien, et K un groupe quelconque. Montrer que le groupe produit $H \times K$ n'est pas abélien.
4. Donner un exemple d'un groupe non abélien G_2 d'ordre 30.
5. Soit G_3 un groupe abélien d'ordre 30.
   (a) Montrer que G_3 est cyclique.
   (b) Calculer le nombre d'éléments de G_3 d'ordre 5.