Colle 1a - Espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif. Sauf mention explicite du contraire, l'expression « espace vectoriel » signifiera « $\mathbb{K}$-espace vectoriel ».

Exercice 1 (Définition et exemples)**.** Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
3. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda x = x^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
4. L'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x + y) = 0$.

Exercice 2 (Sous-espaces vectoriels)**.**
Décider si les ensembles suivantes sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés :

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. L'ensemble des suites réelles convergentes dans l'espace vectoriel des suites réelles.
3. L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
4. L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Familles des vecteurs)**.** Donnez des exemples et justifiez leur validité :

1. exemple d'une famille libre dans $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas génératrice.
2. exemple d'une famille génératrice et liée dans l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. exemple d'une famille de 3 vecteurs liés dans l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2.
4. exemple d'une base de l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_n) \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

Exercice 4 (Applications linéaires)**.** Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{lll} f_1 : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_1(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_2 : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_2(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_3 : & \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 & f_3(P) = (P(-2), P(0), P(1)) \end{array}$$

Pour les $i = 1, 2, 3$ correspondant aux applications linéaires, déterminer $\operatorname{Ker} f_i$ et $\operatorname{Im} f_i$. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 5. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mathbb{K}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, c.-à.-d. $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
2. T est-il surjectif ? Injectif ? Déterminer son noyau.

Colle 1b - Espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif. Sauf mention explicite du contraire, l'expression « espace vectoriel » signifiera « $\mathbb{K}$-espace vectoriel ».

Exercice 1 (Définition et exemples)**.** Justifier si les objets suivants sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
3. L'ensemble des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $a + d = 0$.
4. L'ensemble des fonctions continues sur $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(x)\ dx = 0$.

Exercice 2 (Sous-espaces vectoriels)**.**
Décider si les ensembles suivantes sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés :

1. L'ensemble des fonctions paires $\mathcal{P}$ dans l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n dans l' espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
4. L'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Familles des vecteurs)**.** Donnez des exemples et justifiez leur validité :

1. exemple d'une famille liée dans $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas génératrice.
2. exemple d'une famille libre dans l'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. exemple d'une famille génératrice dans l'ensemble $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3.
4. exemple d'une famille liée de l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_n) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

Exercice 4 (Applications linéaires)**.** Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{lll} f_1 : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_3(P) = (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

Pour les $i = 1,2,3$ correspondant aux applications linéaires, déterminer $\operatorname{Ker} f_i$ et $\operatorname{Im} f_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 5. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On fixe un entier $p \geq 1$.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^p$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$ est linéaire.
2. Est-elle surjective ? Injective ? Déterminer son noyau.

Colle 1A - Espaces vectoriels

Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels)**.**
Décider si les ensembles suivantes sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés :

1. L'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 0$ dans l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x + y) = 0$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On fixe un entier $p \geq 1$.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^p$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ est linéaire.
2. Est-elle surjective ? Injective ? Déterminer son noyau.

Exercice 3. Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto A\sin(x + \varphi)$, où $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que tout élément de F est une combinaison linéaire des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
2. Réciproquement, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ appartient à F. Indication : considérer $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis déterminer un φ approprié.
3. Montrer que F est un sev du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que les fonctions cos et sin engendrent ce sous-espace.

Exercice 4 (Rang et familles libres)**.** On considère les deux matrices

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $C_i(X)$ la i-ième colonne de X et $C_i(Y)$ la i-ième colonne de Y ($i = 1$, 2 ou 3).

1. Vérifier si la famille de trois vecteurs $(C_i(X))_{1\leq i\leq 3}$ est libre.
2. Vérifier si la famille de trois vecteurs $(C_i(Y))_{1\leq i\leq 3}$ est libre.
3. En déduire le rang des matrices X et Y et leur noyau.

Exercice 5 (Familles des vecteurs)**.** Donnez des exemples et justifiez leur validité :

1. exemple d'une famille libre dans l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. exemple d'une famille liée de l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_n) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
3. exemple d'une base de l'ensemble $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}$.

Exercice 6 (Applications linéaires)**.** Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{lll} f_1 : & \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 & f_1(P) = (P(-2), P(0), P(1)) \\ f_2 : & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_2(P) = (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

Pour les $i = 1, 2$ correspondant aux applications linéaires, déterminer Ker f_i et Im f_i. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Colle 1B - Espaces vectoriels

Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels)**.**
Décider si les ensembles suivantes sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés :

1. L'ensemble des fonctions paires $\mathcal{P}$ dans l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n dans l' espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, c.-à.-d. $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
2. T est-il surjectif ? Injectif ? Déterminer son noyau.

Exercice 3. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}$. On notera $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_m)$ une famille de polynômes non nuls, telle que $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_m)$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
(Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer le coefficient du polynôme de plus haut degré apparaissant dans une combinaison linéaire des P_k valant 0.*)*

Exercice 4 (Rang et familles libres)**.** On considère les deux matrices

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $C_i(X)$ la i-ième colonne de X et $C_i(Y)$ la i-ième colonne de Y ($i = 1$, 2 ou 3).

1. Montrer que la famille de trois vecteurs $(C_i(X))_{1\leq i\leq 3}$ est libre.
2. Montrer que la famille de trois vecteurs $(C_i(Y))_{1\leq i\leq 3}$ est liée. Montrer que si on prend seulement 2 de ces vecteurs, on obtient une famille libre.
3. En déduire le rang des matrices X et Y et leur noyau.

Exercice 5 (Familles des vecteurs)**.** Donnez des exemples et justifiez leur validité :

1. exemple d'une famille génératrice et liée dans l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. exemple d'une famille de 3 vecteurs liés dans l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2.
3. exemple d'une base de l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_n) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

Exercice 6 (Applications linéaires)**.** Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{lll} f_1 : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} & f_1(x, y, z, t) = x - y + 3t \\ f_2 : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x, y, z) = (xy, x, y) \end{array}$$

Pour les $i = 1, 2$ correspondant aux applications linéaires, déterminer Ker f_i et Im f_i. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Colle 2a - Bases duales et préduales

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Calculer la base duale $\mathcal{B}^*$.

Exercice 2. Donner la base canonique de l'espace des matrices $M_2(\mathbb{R})$ et sa duale.

Exercice 3. Soient f_1, f_2 les deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définis par

$$f_1(x, y) = x + y, \qquad f_2(x, y) = x - y.$$

1. Montrer que (f_1, f_2) forme une base de $(\mathbb{R}^2)$.
2. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base (f_1, f_2) :

$$g(x, y) = x, \qquad h(x, y) = 2x - 6y.$$

3. Calculer la base préduale.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^* \qquad f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, \qquad f_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer la base préduale (f_1, f_2, f_3).

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

soit inversible.

Colle 2b - Bases duales et préduales

Exercice 1. Soit $f, g \in E^*$ pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telles que $\ker f = \ker g$. Montrer qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda g$.

Exercice 2. Dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, on considère deux vecteurs distincts u et v. Construire une forme linéaire ϕ sur E telle que : $\phi(u) \neq \phi(v)$.
Indication : Compléter $e_1 = u - v$ en une base B de E.

Exercice 3. Dans $(\mathbb{R}^2)^*$, on considère les formes linéaires ϕ_1 et ϕ_2 dont les matrices dans les bases canoniques sont $(2 \;\; 1)$ et $(3 \;\; 2)$ respectivement. Calculer la base préduale.

Exercice 4.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application ϕ_A est un élément de $M_n(\mathbb{R})^*$:
$$\phi_A : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad M \mapsto Tr(AM)$$
2. Montrer que l'application ϕ est linéaire et injective :
$$\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})^*, \quad A \mapsto \phi_A$$
3. En déduire que tout élément de $M_n(\mathbb{R})^*$ s'écrit ϕ_A pour un unique $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & x & 0 \\ 0 & -1 & -2 & y \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

soit inversible.

Colle 2A - Bases duales et préduales

Exercice 1. Donner la base canonique de l'espace des polynômes $\mathbb{R}_3[X]$ et sa duale.

Exercice 2. Soient f_1, f_2 les deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définis par

$$f_1(x, y) = x + y, \qquad f_2(x, y) = x - y.$$

1. Montrer que (f_1, f_2) forme une base de $(\mathbb{R}^2)$.
2. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base (f_1, f_2) :

$$g(x, y) = x, \qquad h(x, y) = 2x - 6y.$$

3. Calculer la base préduale.

Exercice 3. Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0.$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 4. Soient ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par :

$$\phi_1(P) = P(1), \quad \phi_2(P) = P'(1), \quad \phi_3(P) = \int_0^1 P(t)dt$$

où P est un polynôme de degré $d \leq 2$. Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa base antéduale.

Exercice 5. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ inversibles. Donner des expressions en fonction de $\text{dét}(A)$ et $\text{dét}(B)$ pour les valeurs suivantes :

1. $\text{dét}((-A)^5)$
2. $\text{dét}((BA)^{-1})$
3. $\text{dét}(({}^tB)^{-1})$
4. $\text{dét}({}^t(AB))$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Colle 2B - Bases duales et préduales

Exercice 1. Donner la base canonique de l'espace des matrices $M_2(\mathbb{R})$ et sa duale.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^* \qquad f_2^* = -e_3^*, \qquad f_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer la base préduale (f_1, f_2, f_3).

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^*,\ (f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0) \Rightarrow f \equiv 0$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 4. Soient f_0, f_1, f_2 des formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par :

$$f_i(P) = \int_0^1 x^i P(x)dx \quad \forall\ i = 0, 1, 2$$

Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa base préduale.

Exercice 5. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ inversibles. Donner des expressions en fonction de dét(A) et dét(B) pour les valeurs suivantes :

1. dét(A^{-1})
2. dét$({}^tB)$
3. dét$(-A)$
4. dét$(B^{-1}AB)$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice :

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Colle 3a - Diagonalisation, Trigonalisation

Exercice 1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(A-I)^2$.
3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
4. Calculer A^n pour n entier naturel donné.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et le polynôme caractéristique de f sont premiers entre eux.

Colle 3b - Diagonalisation, Trigonalisation

Exercice 1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit M la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Exercice 3. Soit f qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Exercice 4. Soit A une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.

Colle 3A - Détérminants. Polynôme caractéristique

Exercice 1. Donner un exemple de matrice matrice triangulaire supérieure dans $M_6(\mathbb{R})$ inversible.

Exercice 2. Développer le déterminant de la matrice M réelle suivante sous la forme d'un produit de facteurs linéaires en x :

$$M(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

1. Montrer que toute matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ admet un vecteur propre.
2. Trouver un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui n'admet pas de vecteur propre.

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice réelle :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = 0$.

1. Démontrer que $Im(B) \subset Ker(A)$.
2. On suppose que le rang de A est égal à $n-1$, détérminer le rang de B.

Colle 3B - Détérminants. Polynôme caractéristique

Exercice 1. À quelle condition une matrice de Vandermonde est-elle inversible ?

Exercice 2. En admettant que 1700, 1020, 1122 et 1309 sont tous divisibles par 17, montrer sans le calculer que le déterminant réel suivant est un entier divisible par 17 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Exercice 3.

1. Trouver une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ qui n'admet pas de vecteur propre.
2. Trouver un endomorphisme qui admet chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ comme valeur propre.

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice réelle :

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $BA = 0$.

1. Démontrer que $Im(A) \subset Ker(B)$.
2. On suppose que la dimension de $Ker(B)$ est égale à 1, détérminer le rang de A.

Colle 4a - Diagonalisation

Exercice 1. Donner un exemple de matrice matrice triangulaire supérieure dans $M_6(\mathbb{R})$ inversible.

Exercice 2.

1. Montrer que toute matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ admet un vecteur propre.
2. Trouver un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui n'admet pas de vecteur propre.

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et u un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire un endomorphisme pour lequel il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^d = 0$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés à ses valeurs propres.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donner sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.

Exercice 5. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Vérifier si B est diagonalisable ou trigonalisable.

Colle 4b - Diagonalisation

Exercice 1. À quelle condition une matrice de Vandermonde est-elle inversible ?

Exercice 2.

1. Trouver une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ qui n'admet pas de vecteur propre.
2. Trouver un endomorphisme qui admet chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ comme valeur propre.

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si v est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors v est vecteur propre de A^{-1} pour la valeur propre λ^{-1}.

Exercice 4. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Expliquer sans calcul pourquoi la matrice B n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Vérifier si A est diagonalisable ou trigonalisable.

Colle 4A - Diagonalisation, Trigonalisation

Exercice 1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection : $P^2 = P$. Montrer que P est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Vérifier si B est diagonalisable ou trigonalisable.

Exercice 5. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et le polynôme caractéristique de f sont premiers entre eux.

Colle 4B - Diagonalisation, Trigonalisation

Exercice 1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de réflection : $R^2 = I_n$. Montrer que R est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donner sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Vérifier si A est diagonalisable ou trigonalisable.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f.

anca.nitulescu@ens.fr

Colle 5A - Décomposition de Jordan

Exercice 1. Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit les suites gèomètriques $u(\lambda)$, $u(\lambda)_n = \lambda^n$.

1. Montrer que les suites $u(\lambda)$ sont linéairement indépendantes, c.à-d., quelques soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \dots \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, la famille $u(\lambda_1), \dots, u(\lambda_n)$ est libre.
2. Montrer que l'opérateur de décalage $D : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, défini par $(D(u))_n = u_{n+1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. (L'image par D de la suite $(u_0, u_1, u_2, \dots)$ est la suite $(u_1, u_2, u_3, \dots)$.)
3. En deduire que chaque $u(\lambda)$ est un vecteur propre de D pour la valeur propre λ.

Exercice 2. Soit $A \in M_5(\mathbb{R})$ une matrice qui a deux valeurs propres différentes.

1. Combien de vecteurs propres (linéairement indépendants) peut avoir la matrice A ?
2. Montrer que A est semblable à sa transposée.
3. Combien de classes de similitude de telles matrices $A \in M_5(\mathbb{R})$ existe-t-il ?

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

1. Trouver les valeurs propres et les espaces propres. Déterminer le rang.
2. Calculer les multiplicitées algébriques et géometriques des valeurs propres.
3. Est-ce que la matrice est diagonalisable ? Déterminer la forme normale de Jordan.
4. Déterminer une base de Jordan et une matrice de passage de la base canonique à cette base de Jordan.
5. Dessiner les diagrammes de Young pour la structure des sous-espaces caractréristiques.

Colle 5B - Décomposition de Jordan

Exercice 1. Soit $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (de classe C^∞). Pour chaque on définit $\lambda \in \mathbb{R}$ les fonctions $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $f_\lambda : t \mapsto \exp(\lambda t)$.

1. Montrer que les fonctions f_λ sont linéairement indépendantes, c.à-d., quelques soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, la famille $f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}$ est libre.
2. Montrer que l'opérateur de dérivation $d : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V.
3. En deduire que chaque $f_\lambda \in \mathbb{R}$ est un vecteur propre pour la valeur propre λ.

Exercice 2. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable et M l'élément de $M_{2n}(\mathbb{R})$ défini par blocs par

$$M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det M$.
2. Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
3. Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice définie par blocs $P = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Trouver les valeurs propres et les espaces propres. Déterminer le rang.
2. Calculer les multiplicitées algébriques et géometriques des valeurs propres.
3. Est-ce que la matrice est diagonalisable ?
4. Déterminer la forme normale de Jordan.
5. Dessiner les diagrammes de Young pour la structure des sous-espaces caractréristiques.