Feuille TD - Révisions

Exercice 1 (Inégalité de HADAMARD)**.** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

1. Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, ...x_n)$, on a : $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x_1\|...\|x_n\|$. Cas d'égalité ?
2. Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de taille n, on a $|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Exercice 2. Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

Exercice 3. Détérminer la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation vectorielle d'angle $\pi/6$ et d'axe dirigé par le vecteur $u = (1, 1, 1)$.

Exercice 4. Détérminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan F d'équation $x + 2y - z = 0$.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application bilinéaire dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $B' = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = (1, 0, -1), f_2 = (0, 1, -1), f_3 = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser avec la méthode de Gram-Schmidt la base B'.
3. Ecrire la matrice de φ dans la base B' et dans la nouvelle base orthonormale.
4. Soit q la forme quadratique associée à φ. Exprimer q dans la base B'.
5. Ecrire q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
6. Déterminer la signature et le rang de q.