Feuille de TD 4

Exercice 1. Soit w un nombre complexe non nul, écrivons $w = u + iv = \rho e^{i\theta}$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in [0, 2\pi[$, de sorte que $u = \rho\cos\theta$ et $v = \rho\sin\theta$.

1. Montrer que l'application $f_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto wz$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel « par restriction des scalaires », i.e. la multiplication $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induit, par restriction, une application $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(r, z) \mapsto r \cdot z = rz$, qui munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel : les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés car la multiplication de $\mathbb{C}$ est associative, distributive par rapport à l'addition, et l'élément $1 \in \mathbb{R}$ est l'élément neutre pour la multiplication, i.e. on a, pour tout $r, s \in \mathbb{R}$, $z, z' \in \mathbb{C}$:
$$(rs) \cdot z = r \cdot (s \cdot z), \qquad (r+s) \cdot z = r \cdot z + s \cdot z, \qquad r \cdot (z + z') = r \cdot z + r \cdot z', \qquad 1 \cdot z = z.$$
Montrer que l'application $f_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, que $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et écrire la matrice $M(w)$ de f_w dans la base $(1, i)$ en fonction de u et v, puis de ρ et θ.
3. Déterminer les valeurs propres de la matrice $M(w)$. Dans quels cas $M(w)$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?
4. On munit $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \simeq \mathbb{R}^2$ du produit scalaire euclidien usuel $(\ |\ )$, pour lequel la base $(1, i)$ est orthonormée, c.-à.-d., $(a + bi \mid a' + b'i) = aa' + bb'$. Dans quel cas $M(w)$ est-elle une isométrie de $\mathbb{R}^2$? Quelle est sa nature dans ce cas ?
5. Soit $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto \overline{z}$. Montrer que σ est $\mathbb{R}$-linéaire (mais pas $\mathbb{C}$-linéaire) et écrire sa matrice dans la base $(1, i)$.
6. Montrer que l'application $g_w : z \mapsto w\overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et écrire sa matrice $N(w)$ dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Dans quel cas est-ce une symétrie orthogonale ?

Exercice 2. On considère l'application $\phi : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(A, B) = \mathrm{Tr}(A\,{}^t\overline{B})$.

1. Montrer que pour tout $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Tr}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$.
2. Montrer que ϕ est une forme hermitienne sur $E = M_n(\mathbb{C})$.
3. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, calculer le terme d'indice (i, i) de $A\,{}^t\overline{A}$. En déduire que ϕ est définie positive.

Exercice 3. On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien $(\ |\ )$ usuel et l'on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique.

1. Dire sans calcul, en citant un résultat du cours, pourquoi les matrices suivantes sont diagonalisables dans une base orthonormée ; puis, pour chacune, calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & i \\ -i & 4 & 1 \\ -i & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. $(*)$ Même question pour la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & -1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien $(\ |\ )$ usuel. Montrer que la matrice suivante est unitaire et donner une base orthonormée de vecteurs propres :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2i & 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+2i & 1-i \\ -1-i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix} .$$