Feuille de TD 3

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$, où O désigne le point $(0,0)$. Soient I le point de coordonnées $(1,1)$ et $r = r(I, \pi/4)$ la rotation de centre I et d'angle $\pi/4$, i.e. pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, le point $M' = r(M)$ est défini par $\overrightarrow{IM'} = \vec{r}(\overrightarrow{IM})$, où $\vec{r}$ est la rotation vectorielle d'angle $\pi/4$.

1. Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$, exprimer ses coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathcal{R} = (I, e_1, e_2)$ en fonction de x et y.
2. Exprimer les coordonnées (X', Y') de $M' = r(M)$ en fonction de X et Y, puis de x et y.
3. En déduire les coordonnées (x', y') de M' dans $\mathcal{R}_0$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Soit $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) la droite affine d'équation $3y - x = 1$ (resp. $x + 2y = 4$) et soit p (resp. s) la projection sur $\mathcal{D}_1$ (resp. la symétrie par rapport à $\mathcal{D}_1$) parallèlement à $\mathcal{D}_2$.

1. (Question de cours) Déterminer la direction D_1 de $\mathcal{D}_1$ (resp. D_2 de $\mathcal{D}_2$).
2. Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{I\}$ pour un point I que l'on déterminera.
3. Déterminer un vecteur v_1 (resp. v_2) engendrant la droite vectorielle D_1 (resp. D_2) puis, notant $\mathcal{C}$ la base (v_1, v_2), écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C})$.
4. Soit $\mathcal{R}$ le repère $(I, \mathcal{C})$ de l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Pour tout point $M = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, exprimer les coordonnées (X, Y) de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de x et y.
5. Soient (X', Y') les coordonnées de $M' = p(M)$, et (X'', Y'') celles de $M'' = s(M)$, dans le repère $\mathcal{R}$. Exprimer (X', Y') et (X'', Y'') en fonction de X et Y.
6. Dans le repère $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$, déterminer les coordonnées (x', y') de M' et (x'', y'') de M''.

Exercice 3.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, donner l'équation de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0)$ et de direction $D = \mathbb{R}\vec{u}$, où $\vec{u} = ae_1 + be_2 \neq 0$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation du plan affine $\mathcal{P}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de direction $P = \mathbb{R}\vec{u} \oplus \mathbb{R}\vec{v}$, où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner les équations de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de direction $D = \mathbb{R}\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur ci-dessus.

Exercice 4. Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{E}$, on écrira $M(x, y, z)$ pour indiquer que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $I(-1, 0, 1)$ et de direction le plan vectoriel P engendré par $f_1 = e_1 + 2e_2$ et $f_2 = e_2 + e_3$. Soit D la droite vectorielle $P^{\perp}$. On note π_D (resp. π_P) la projection orthogonale sur D (resp. P) et σ la symétrie orthogonale par rapport à P.

1. Donner un vecteur non nul $f_3 \in D$.
2. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, rappeler les formules exprimant $\pi_D(v)$, $\pi_P(v)$ et $\sigma(v)$ en fonction de v et de f_3, puis écrire dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la matrice A (resp. B) de π_P (resp. σ).
3. Soient f la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et g la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IM}$ puis déterminer celles (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des points $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$.

4. Soit t_u la translation de vecteur $u = f_1 - f_2$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, déterminer les coordonnées (x'_1, y'_1, z'_1) et (x'_2, y'_2, z'_2) des points $M'_1 = t_u(M_1)$ et $M'_2 = t_u(M_2)$. Déterminer, en le justifiant, la nature et les caractéristiques de la transformation affine $t_u \circ g$.

Exercice 5. Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et (x, y, z) les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z+2 \\ x \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.
3. Déterminer l'ensemble des points $I \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$, calculer dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{If(I)}$, et donner la nature et les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 6. Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et (x, y, z) les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f, puis sa nature et ses caractéristiques géométriques.

Exercice 7. Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine telle que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, $M' = f(M)$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\Big(x + y + \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}\Big(x + y - \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ z' &= \frac{1}{2}\Big(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\Big) + 1 \end{aligned}$$

1. Déterminer la partie linéaire ϕ de f et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. Montrer que ϕ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.
3. Soit $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les projections orthogonales u et v de w sur $F = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id})$ et sur $F^{\perp}$. Soit t_{-u} la translation de vecteur $-u$; déterminer un point fixe I de $g = t_{-u} \circ f$.
4. Déterminer la nature de f et préciser ses caractéristiques géométriques.

Exercice 8. Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soient I le point $(0,2,0)$, w le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$, et $\mathcal{D}$ la droite affine $I + \mathbb{R}w$. Soit f le vissage d'axe $\mathcal{D}$ orienté par w, d'angle $\pi/4$ et de vecteur de vissage $\sqrt{2}w = e_1 - e_3$, et soit $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire.

1. Déterminer un vecteur unitaire v tel que $\mathcal{C} = (e_2, v, w)$ soit une BON directe. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ et son inverse P^{-1}.
2. Écrire la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f})$, puis la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ (on écrira B sous la forme $B = \dfrac{1}{4}A$, où tous les coefficients de A sont de la forme $p + q\sqrt{2}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$).
3. Soit g la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par w, et d'angle $\pi/4$. Pour tout point $M = (x,y,z)$, déterminer les vecteurs $\overrightarrow{Ig(M)}$ puis $\overrightarrow{If(M)}$.
4. Déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = f(M)$.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z = 1$ et soient P la direction de $\mathcal{P}$ et σ la partie linéaire de s.

1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à P, puis choisir un point $I \in \mathcal{P}$ et pour tout point $M = (x,y,z)$ calculer le vecteur $\overrightarrow{Is(M)}$ puis déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = s(M)$.

Soit t_w la translation de vecteur $w = 3e_2$ et soit $g = t_w \circ s$.

2. Déterminer les projections orthogonales v et u de w sur $D = P^{\perp}$ et P respectivement.
3. Déterminer les caractéristiques géométriques de g.

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/4$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathrm{SO}(3)$.
3. Écrire la matrice $B = RA$ et montrer que $B \in \mathrm{SO}(3)$.
4. Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (L'angle à trouver θ n'est pas, a priori, de la forme $q\pi$, avec $q \in \mathbb{Q}$; pour le déterminer on se contentera de donner la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)
5. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B - I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente (on ne cherchera pas à calculer explicitement les f_i). Pour $i = 1,2,3$, exprimer Bf_i dans la base $\mathcal{C}$.
6. Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1}$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ comme dans la question précédente, et pour $i = 1,2,3$, soit $f'_i = Sf_i$. Exprimer $u(f'_i)$ dans la base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ ou bien $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$.)

7. Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR$. (On pourra remarquer que $C = R^{-1}BR$.)

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/6$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(A)$.
3. Écrire la matrice $B = RA$, montrer que $B \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(B)$.
4. Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (L'angle à trouver θ n'est pas, a priori, de la forme $q\pi$, avec $q \in \mathbb{Q}$; pour le déterminer on se contentera de donner la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)
5. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B + I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente (on ne cherchera pas à calculer explicitement les f_i). Pour $i = 1, 2, 3$, exprimer Bf_i dans la base $\mathcal{C}$.
6. Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1}$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ comme dans la question précédente, et pour $i = 1, 2, 3$, soit $f_i' = Sf_i$. Exprimer $u(f_i')$ dans la base $\mathcal{C}' = (f_1', f_2', f_3')$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f_1', f_2', -f_3')$ ou bien $\mathcal{D}' = (f_1', -f_2', f_3')$.)
7. Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR = R^{-1}BR$.

Exercice 12. Soit $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $e_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et soit D_θ la droite vectorielle $\mathbb{R}e_\theta$. (Noter que $e_{\theta+\pi} = -e_\theta$, de sorte que $D_{\theta+\pi} = D_\theta$.) On note σ_θ la symétrie orthogonale par rapport à D_θ et l'on rappelle que, pour tous θ, φ, la composée $\sigma_{\theta+\varphi} \circ \sigma_\varphi$ est la rotation d'angle 2θ.

1. Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de σ_0, puis de σ_θ pour θ arbitraire.

On note $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 2. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, on note $t_v : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur v. On note $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à une droite affine $\mathcal{D}$ (sa partie linéaire est la symétrie orthogonale σ_D, où D est la direction de $\mathcal{D}$).

2. Soient D une droite vectorielle, A un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ la droite affine $A + D$. Soient $v \in D^\perp$. Montrer que $s_{\mathcal{D}} \circ t_{-v}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine $\mathcal{D}' = t_{v'}(\mathcal{D}) = A + v' + D$, pour un $v' \in D^\perp$ que l'on déterminera en fonction de v.

On fixe $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, on note D la droite vectorielle D_φ, et l'on fixe deux points $A, I \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AI} \in D^\perp$. Soit $r = r(I, \theta)$ la rotation de centre I et d'angle θ, soit $s = s_{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D} = A + D$, soit t_u la translation de vecteur u, et soit $f = r \circ s \circ t_u$.

3. Sans faire de calculs, dire quelle est la nature géométrique de f.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer, en faisant un minimum de calculs, que $f = s_{I+D_\psi} \circ t_w$, pour un angle ψ que l'on exprimera en fonction de φ et θ et un vecteur w que l'on exprimera en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et u.

On prend $\boxed{\varphi = \pi/6 = \theta, \quad I = (1,1), \quad A = (2, 1-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad u = -2\sqrt{3}e_2.}$

5. Vérifier que $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à la droite $D = D_{\pi/6}$. Puis, pour tout point $M = (x, y)$, déduire de la question précédente les coordonnées (x', y') du point $M' = f(M)$.
6. (Peut se faire indépendamment des questions précédentes.) On prend φ, θ, I, A, u comme ci-dessus. Pour tout $M = (x, y)$, déterminer par des calculs directs le point $t_u(M)$, puis les vecteurs $\overrightarrow{Ast_u(M)}$, $\overrightarrow{Ist_u(M)}$ et $\overrightarrow{If(M)}$, et enfin les coordonnées (x', y') de $f(M)$.