# Contrôle continu 2

*Les exercices peuvent être traités indépendamment. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun matériel (calculatrice, téléphone portable, etc.) ou document n'est autorisé.*
*Durée : 2h00*

**Exercice 1** (Questions de cours)**.**

1. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale. Que peut-on dire de son déterminant ?
2. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien. Donner la définition d'une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. À quelle condition est-ce une isométrie ?

**Exercice 2.** Détérminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.

**Exercice 3.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ espace vectoriel de dimension $n$, tel que $u^2 = \mathrm{id}$.

1. Soit $x \in E$, montrer que le vecteur $x_1 = u(x) + x$ (resp. $x_2 = x - u(x)$) vérifie $u(x_1) = x_1$ (resp. $u(x_2) = -x_2$).
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.
3. En déduire l'existence d'un entier $s \in [0, n]$ et d'une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ s'écrit
$$M = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien affine de dimension 2 muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $I(6,1)$ et dirigée par $u = (3,1)$. Soit $\sigma_1$ la symmétrie par rapport à $\mathcal{D}$. Soit $\sigma_2$ l'application,
$$\sigma_2(M(x,y)) = \begin{pmatrix} y+2 \\ x+1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},$$
où $(x, y)$ sont les coordonnées de $M$ dans $\mathcal{E}$.

1. Donner $D$ la direction de $\mathcal{D}$ et une equation dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}$.
2. Quelle est la partie linéaire $\overrightarrow{\sigma_2}$ de $\sigma_2$ ? Montrer que c'est une isométrie vectorielle et donner ses caractéristiques.
3. Exprimer $\sigma_1$ sous la forme,
$$\sigma_1(M(x,y)) = \begin{pmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},$$
où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}?$$
4. Exprimer $\sigma_2 \circ \sigma_1$ sous la forme précédente.
5. Montrer que la partie linéaire $\overrightarrow{\sigma_2 \circ \sigma_1}$ de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation. On déterminera son angle $\theta$.
6. Justifier que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation affine. Quel est son centre ?

**Exercice 5.** Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace affine euclidien muni de l'orientation donnée par la base canonique. Soit l'application

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de $f$.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.
3. Determiner sa nature géométrique, et donner ses caractéristiques.
4. Justifier que $f$ est une isométrie.
5. Donner l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$.
6. Donner les caractéristiques géométriques de $f$.

**Exercice 6.** On se place dans $\mathcal{E}$ un espace euclidien muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$.
On notera $M(x, y, z)$ le point $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $I(7, 2, 1)$, et engendré par les vecteurs $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_3 \\ f_2 = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$.

Soit $P$ la direction de $\mathcal{P}$ et $D$ la droite vectorielle orthogonale à $P$.
Soit $\sigma$ la symmétrie par rapport à $\mathcal{P}$.

1. On note $\mathcal{R}'$ le repère $(I, e_1, e_2, e_3)$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, donner en fonction de $x, y, z$ les coordonnées $(X, Y, Z)$ de $M$ dans $\mathcal{R}'$.
2. Donner une equation de $P$ dans $\mathbb{R}^3$ et de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}$.
3. Donner un vecteur $f_3 \in D$.
4. Donner la matrice dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ de la symmétrie $s$ de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $P$.
5. Ecrire la symmétrie $\sigma$ sous la forme,

$$\sigma(M(x, y, z)) = \begin{pmatrix} ax + by + cz + d \\ ex + fy + gz + h \\ ix + jy + kz + l \end{pmatrix}$$

   avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera, où $(x, y, z)$ sont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de $M$.