Contrôle continu 2 - Corrigé

Exercice 1.

1. Matrice orthogonale : $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n telle que ${}^tMM = I_n$.
   Son déterminant est ± 1.
2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est affine si l'application induite,

$$\overrightarrow{f} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{MM'} & \mapsto & \overrightarrow{f(M)f(M')} \end{array}$$

   est une application linéaire.
   C'est une isométrie lorsque $\overrightarrow{f}$ est orthogonale (i.e. elle préserve le produit scalaire de E).

Exercice 2. Un vecteur engendrant D est $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\pi_D((x,y,z)) = \frac{\langle (x,y,z)|(2,1,3)\rangle}{\|(2,1,3)\|^2}(2,1,3) = \frac{2x+y+3z}{14}(2,1,3).$$

On a que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\pi_D = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
La symétrie orthogonale s'écrit en fonction de la projection π_D comme

$$\sigma_D((x,y,z)) = 2\pi_D((x,y,z)) - (x,y,z).$$

On en déduit que $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\sigma_D = 2P - I_3 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. 1. Vérification triviale.

2. Les deux valeurs propres de l'endomorphisme u sont 1 et -1. On sait que les sous-espaces propres de u sont en somme directe. En plus, d'après la question précédente on a $\forall x \in E,\ x = 1/2(x_1 + x_2)$ où $x_1 \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ donc

$$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = E$$

3. L'endomorphisme u est diagonalisable d'après le résultat antérieur. Si on note s la multiplicité de la valeur propre 1 on peut conclure.

Exercice 4. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien affine de dimension 2 muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $I(6,1)_{\mathcal{R}}$ dirigée par $u = (3,1)$.

1. Une equation de D dans la base e_1, e_2 est $3y - x = 0$. Par exemple, on peut poser $v = (-1,3)$ orthogonal à D, et on trouve cette équation en regardant $\langle (x,y)|(-1,3)\rangle = 0$.
   Une equation de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$ est donc de la forme :

$$3y - x = c,$$

   or $I = (6,1)_{\mathcal{R}}$ est dans $\mathcal{D}$, on trouve donc que $c = 3 \times 1 - 6 = -3$

2. La partie linéaire $\overrightarrow{\sigma_2}$ de $\sigma_2(M(x,y)) = \begin{pmatrix} y+2 \\ x+1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ a pour matrice $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - **La nature de $\overrightarrow{\sigma_2}$**
   On a ${}^tS_2S_2 = I_2$ donc S_2 est orthogonale, et son déterminant est -1.
   C'est une symmétrie orthogonale.
   - **Les points fixes de $\overrightarrow{\sigma_2}$**
   On résout $S_2X = X$ et on trouve la droite D_2 d'équation $y = x$.
   On a que $\overrightarrow{\sigma_2}$ est une symmétrie orthogonale par rapport à la droite D_2.
3. On cherche d'abord $s_1 = \overrightarrow{\sigma_1}$. Soit $v = (-1, 3)$ un vecteur normal à D. La symmétrie s_1 s'écrit alors,
$$s_1 = \mathrm{id} - 2\pi_{D^\perp},$$
où $\pi_{D^\perp}(t) = \dfrac{\langle t|v\rangle}{||v||^2}v$ pour $t \in \mathbb{R}^2$. On applique ça dans (e_1, e_2) aux vecteurs e_1 et e_2 et on trouve,
$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(s_1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$
Dans $\mathcal{R}$, comme s_1 est la partie linéaire de σ_1, σ_1 s'écrit nécessairement,
$$\sigma_1(M(x,y)) = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 4x+3y \\ 3x-4y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}\right),$$
où $e, f \in \mathbb{R}$ sont à déterminer. Mais comme on sait que $\sigma_1(I) = I$, puisque $I \in \mathcal{D}$, on a que $e = 5 \times 6 - 4 \times 6 - 3 = 3$ et $f = 5 - 3 \times 6 + 4 = -9$.
4. En composant, on trouve, à l'aide des formules précédentes,
$$\sigma_2 \circ \sigma_1((x,y)_{\mathcal{R}}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x-4y-9+2\times 5 \\ 4x+3y+3+5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x-4y+1 \\ 4x+3y+8 \end{pmatrix}.$$
5. Dans la base (e_1, e_2) $\overrightarrow{\sigma_2 \circ \sigma_1}$ a pour matrice :
$$S_{12} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
c'est donc une matrice orthogonale comme produit de matrices orthogonales (mais on le savait déjà puisque $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une isométrie comme composée d'isométrie) et son déterminant est égal au produit des déterminants de s_1 et s_2, qui sont des symmétries, c'est donc 1.
Donc $\overrightarrow{\sigma_2 \circ \sigma_1}$ est une rotation (de centre 0 car linéaire) et d'angle $\theta = \arccos\dfrac{3}{5}$ car $\sin\theta = \dfrac{4}{5} > 0$.
6. Comme sa partie linéaire est une rotation, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation affine. Son centre est alors l'unique point fixe. On résoud donc dans $\mathcal{R}$ $\sigma_2 \circ \sigma_1(M) = M$:
$$\begin{cases} 5x = 3x - 4y + 1 \\ 5y = 4x + 3y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = -15 \\ -10y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Exercice 5. 1. La partie vectorielle de f est
$$\overrightarrow{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
On note A cette matrice (c'est la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base canonique).

2. Il suffit de montrer que les colones de la matrice A sont deux à deux orthogonales et de norme 1. $||C_1|| = ||C_2|| = \dfrac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ et $\langle C_1|C_2\rangle = \dfrac{1}{16}(3+3-6) = 0$. Enfin,
$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

3. La nature géométrique de $\overrightarrow{f}$, et ses caractéristiques :

   Le déterminant dét $A = 1$. Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et $\overrightarrow{f}$ est une rotation.

   • **Axe de $\overrightarrow{f}$.**
   Soit $X \in \mathbb{R}^3$.
$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = \sqrt{6}z = \frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x = y \text{ et } z = 0.$$
   L'axe D de f est Vect$(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$.

   • **Angle de $\overrightarrow{f}$.**
   On a que $2\cos\theta = \mathrm{Tr}(M) - 1 \;\Rightarrow\; \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et donc $\cos\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$.
   Le signe de $\sin\theta$ est le signe de dét $\left[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} > 0.$
   Donc, f est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ autour de $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$.
4. On a montré à la question 2 que $\overrightarrow{f}$ était une isométrie, c'est donc aussi le cas de f.
5. On a à trouver M tel que que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}) = \mathrm{Vec}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$.
$$\begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 1 \\ x - y - \sqrt{6}z = 1 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y \text{ et } z = 0.$$
6. Les caractéristiques géométriques de f.
   Fix(f) est vide, donc f est un vissage de vecteur $\overrightarrow{u}$, d'axe $\mathcal{D}$ orientée par $\overrightarrow{u}$, et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 6. 1. On a $M(x-7, y-2, z-1)_{\mathcal{R}'}$.
   On peut le retrouver en écrivant dans le repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$:
$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OM}.$$
2. Comme $f_3 = f_1 \wedge f_2 = (-1, -3, 2)$ est orthogonal à P, on en déduit comme équation dans la base (e_1, e_2, e_3) du plan vectoriel P,
$$P : x + 3y - 2z = 0.$$
   On sait alors que l'équation de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme $x + 3y - 2z = c$, où $c \in \mathbb{R}$. Comme $I(7,2,1)_{\mathcal{R}}$ est dans $\mathcal{P}$, on en déduit que $c = 7 + 3 \times 2 - 2 = 11$.
3. Dans la base e_1, e_2, e_3, on a $f_1 = (2,0,1)$ et $f_2 = (1,1,2)$. On peut prendre $f_3 = f_1 \wedge f_2 = (-1,-3,2)$.
4. On sait que $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\pi_D(\overrightarrow{v})$ où π_D est la projection sur la droite D, orthogonale à P et donc engendrée par f_3 (ou $-f_3$) donc,
$$s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\frac{\langle -f_3 | \overrightarrow{v}\rangle}{\|f_3\|^2}(-f_3),$$
   et il suffit, pour écrire la matrice de s dans la base e_1, e_2, e_3 de calculer $s(e_1), s(e_2), s(e_3)$, on trouve,
$$S = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(s) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$
5. Comme I est un point fixe de σ (car $I \in \mathcal{P}$), on a, en écrivant $M(x,y,z)_{\mathcal{R}} = M(X,Y,Z)_{\mathcal{R}'}$,
$$f((X,Y,Z)_{\mathcal{R}'}) = S\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6X - 3Y + 2Z \\ -3X - 2Y + 6Z \\ 2X + 6Y + 4Z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$
$$f((x,y,z)_{\mathcal{R}}) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6(x-7) - 3(y-2) + 2(z-1) + 7 \times 7 \\ -3(x-7) - 2(y-2) + 6(z-1) + 7 \times 2 \\ 2(x-7) + 6(y-2) + 4(z-1) + 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6x - 3y + 2z + 11 \\ -3x - 2y + 6z + 33 \\ 2x + 6y + 4z - 23 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$