Contrôle continu 1

Les exercices peuvent être traités indépendamment. Certaines questions, plus difficiles, sont marquées d'une étoile (⋆). La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Durée : 2h00

Exercice 1 (Questions de cours)**.**
Soit $||\cdot||$ la norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E induite par un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

1. Calculer $||u+v||^2$ en fonction de $||u||$,$||v||$ et $\langle u,v\rangle$.
2. A quelle condition a-t-on $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$?
3. Interpréter géométriquement cette condition en dimension 2, pour le produit scalaire usuel. Quel théorème retrouve-t-on ?
4. Calculer $||u+v||^2 + ||u-v||^2$ en fonction de $||u||$ et $||v||$.
5. On définit sur E^2 une application f par : $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u,v) = \dfrac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2)$. Montrer que f est un produit scalaire.

Exercice 2. Soit l'application suivante sur $\mathbb{R}^2$:

$$\phi(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2.$$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
2. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ $u = (2,1)$ et $v = (3,-12)$. Ces deux vecteurs sont-ils orthogonaux pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$?
3. Calculer $||u||$ pour la norme induite par $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$. On considère l'application suivante sur E :

$$\phi(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2 - 2x_3y_1 - 4x_3y_3.$$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Ecrire la matrice A de ϕ dans la base canonique.
3. Déterminer le rang de ϕ.
4. Trouver la forme quadratique q associée.
5. Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
6. Déterminer la signature de q.
7. Déterminer une base orthogonale pour q.
8. (⋆) Existe-t-il un vecteur non-nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $q(v) = 0$?

Exercice 4. Soit A la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier rapidement que A est diagonalisable.
2. Trouver les valeurs propres de A ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de A.
3. Quelle est la signature de la forme quadratique

$$Q(x, y, z) = 7x^2 + 8xy - 10xz - 2y^2 + 8yz + 7z^2 \quad ?$$

Exercice 5. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). On considère la forme définie ainsi :

$$\forall M, N \in E, \quad \langle M|N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$

On rappelle que $\forall A, B \in E$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.

1. Montrer que $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

Dorénavant, on notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot|\cdot\rangle$.

2. ($\star$) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\forall M, N \in E$, $\|MN\|^2 \leqslant \|{}^tMM\| \cdot \|{}^tNN\|$.
3. Soit D une matrice réelle diagonale. Montrer que si les coefficients diagonaux de D sont positifs ou nuls, alors $\mathrm{Tr}(D^2) \leqslant \mathrm{Tr}(D)^2$.
4. Montrer que $\forall M \in E$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX({}^tMM)X \geqslant 0$.
   Qu'en déduisez-vous sur le signe des valeurs propres de la matrice ${}^tMM$?
5. ($\star$) En utilisant un théorème du cours sur la diagonalisation de matrices symétriques réelles, déduire de ce qui précède que $\forall M \in E$, $\mathrm{Tr}(({}^tMM)^2) \leqslant \mathrm{Tr}({}^tMM)^2$.
6. Montrer à l'aide de ce qui précède que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire que $\forall M, N \in E$, $\|MN\| \leqslant \|M\| \cdot \|N\|$.