Contrôle continu - Corrigé

Exercice 1. Soit $\|\cdot\|$ la norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E induite par un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

1. $\forall\, u, v \in E$, $\|u+v\|^2 = \langle u+v|u+v\rangle = \langle u|u\rangle + \langle v|v\rangle + 2\langle u|v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u|v\rangle$
2. $\forall\, u, v \in E$, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si, et seulement si, u et v sont orthogonaux pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
3. Soit O un point du plan. Si $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel, alors la condition ci-dessus signifie que le triangle $(O, O+u, O+v)$ est rectangle en O et on retrouve **le théorème de Pythagore**.
4. $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = (\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u|v\rangle) + (\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u|v\rangle) = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
5. On reconnaît **l'identité de polarisation** qui exprime en fonction de la norme $\|\cdot\|$ le produit scalaire, qui est la "forme polaire" associé à cette norme : $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u,v) = 1/4\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \langle u|v\rangle$. Donc f est le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Exercice 2. Soit la forme
$$\phi(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2.$$

1. Soient $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x_1', x_2')$ et $y = (y_1, y_2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et t un nombre réel.

   Montrons que
   a) ϕ est une **forme symétrique** : $\phi(y,x) = 2y_1x_1 + x_2y_2 = 2x_1y_1 + x_2y_2 = \phi(x,y)$,
   b) ϕ est une **forme linéaire** en sa première variable :
   $\phi(tx+x', y) = 2(tx_1 + x_1')y_1 + (tx_2 + x_2')y_2 = t(2x_1y_1 + x_2y_2) + (2x_1'y_1 + x_2'y_2) \Rightarrow$
   $\phi(tx+x', y) = t\phi(x,y) + \phi(x', y)$.
   En effet, a) et b) impliquent que ϕ est une **forme bilinéaire symétrique**.

   Montrons maintenant que ϕ est **définie positive** :
   $\phi(x,x) = 2x_1^2 + x_2^2 \geqslant 0$, de plus, $\phi(x,x)$ ne s'annule que si $x = (0,0)$.
   Cela prouve que ϕ est un **produit scalaire**.
2. $\langle u|v\rangle = \phi(u,v) = 2\cdot(2\cdot 3) + 1\cdot(-12) = 0 \Rightarrow$ u et v sont bien orthogonaux pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
3. $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{2\cdot 2^2 + 1^2} = 3$.

Exercice 3. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$. On considère la forme suivante sur $\mathbb{R}^3$:
$$\phi(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2 - 2x_3y_1 - 4x_3y_3.$$

1. La démarche pour montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique est la même que celle de la question 1 de l'exercice 2.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
3. Le déterminant de A est non nul (dét$(A) = -36$) donc le rang de A est 3.
   Or ϕ est représentée dans la base canonique par A, donc le rang de ϕ est 3.
4. $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_3^2$.
5. On applique l'algorithme de Gauss. Selon la manière de mener le calcul, on peut aboutir à plusieurs décompositions différentes.
   $q(x_1, x_2, x_3) = 2\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 - x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + 2x_3)^2 - 12x_3^2$.
   $q(x_1, x_2, x_3) = 2\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 - x_3\right)^2 - 6\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + 3x_2^2$.

6. Deux des coefficients quadratiques des expressions ci-dessus sont strictement positifs, et un est strictement négatif. La signature de q est donc $(2,1)$.
7. Notons B la matrice dont les lignes représentent les formes linéaires de l'une des décompositions ci-dessus dans le base canonique. Alors les colonnes de la matrice B^{-1} forment une base orthogonale pour q. [1]
8. Le vecteur $v = (0, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est un vecteur isotrope pour q.

Exercice 4. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. A est une matrice symétrique, donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
2. Les valeurs propres de A sont 12, 6 et -6.
   Les vecteurs $X = {}^t(1,0,-1), Y = {}^t(1,1,1)$ et $Z = {}^t(1,-2,1)$ sont des vecteurs propres de A correspondant respectivement aux valeurs propres 12, 6 et -6.
   En outre, comme les trois valeurs propres sont deux à deux distinctes, la famille (X,Y,Z) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Enfin, comme A est une matrice symétrique réelle, le théorème spectral assure que les espaces propres associés à ses différentes valeurs propres sont deux à deux orthogonaux (au sens du produit scalaire usuel).
   De cela, on déduit que la famille (X,Y,Z) est une base orthogonale de vecteurs propres de A.
   Pour obtenir une base orthonormée, il suffit dès lors de les normaliser : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}Y, \frac{1}{\sqrt{6}}Z\right)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A.
3. La forme quadratique Q est représentée dans la base canonique par la matrice A. Comme deux des valeurs propres de A sont strictement positives et que la dernière est strictement négative, la signature de Q est $(2,1)$.

Exercice 5. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$. On considère la forme définie ainsi :

$$\forall M, N \in E, \quad \langle M|N \rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$

1. Montrons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire :
   - $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une **forme symétrique** car $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.
   - $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une **forme bilinéaire** car $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$.
   - $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est **définie positive** car $\mathrm{Tr}({}^tMM) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}^2$ où $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle {}^tMM\ {}^tNN \rangle| \leqslant \|{}^tMM\| \cdot \|{}^tNN\|$.
   On remarque que : $|\langle {}^tMM\ {}^tNN \rangle| = |\,\mathrm{Tr}({}^tMM\ {}^tNN)| = |\,\mathrm{Tr}({}^tN {}^tM\ MN)| = \|MN\|^2$.
3. Si $D = Diag(\lambda_i)_{i=1}^n$, $\lambda_i \geq 0$, alors $\mathrm{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n {\lambda_i}^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 = \mathrm{Tr}(D)^2$.
4. On calcule ${}^tX({}^tMM)X = ({}^tX {}^tM)(MX) = {}^t(MX)(MX) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sum_{k=1}^n (x_i m_{ki} + x_j m_{kj})^2 \geqslant 0$.
   On déduit que la forme quadratique représentée dans la base canonique par la matrice ${}^tMM$ est positive, donc les valeurs propres λ_i de ${}^tMM$ sont positives.
5. La matrice ${}^tMM$ est symétrique, donc diagonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = P^{-1}DP$.
   En plus, la matrice $D = Diag(\lambda_i)_{i=1}^n$ est telle que $\lambda_i \geq 0$, $\mathrm{Tr}({}^tMM) = \mathrm{Tr}(P^{-1}DP) = \mathrm{Tr}(D)$.
   En utilisant la question 3 on écrit : $\mathrm{Tr}(({}^tMM)^2) = \mathrm{Tr}(D^2) \leqslant \mathrm{Tr}(D)^2 = \mathrm{Tr}({}^tMM)^2$.
   On obtient $\forall M \in E, \quad \mathrm{Tr}(({}^tMM)^2) \leqslant \mathrm{Tr}({}^tMM)^2$.
6. La question précédente donne $\|{}^tMM\| \leqslant \|M\| \quad \forall M \in E$.
   On déduit de la question 2 que $\|MN\|^2 \leqslant \|{}^tMM\| \cdot \|{}^tNN\| \leqslant \|M\| \cdot \|N\|$.

---

1. Par exemple, si on choisit la première décomposition, $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.