
Approfondissement

Énoncés

Exercice 1.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 2^8 par 17 ?
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $n = 19^{73}$ par 17.
3. L'entier 323 est-il premier ?
4. Pour tout nombre premier p , calculer la valuation p -adique de 594.
5. Déterminer l'écriture de 55 en base 2.
6. Calculer 6^{55} modulo 61.

Exercice 2. Soit $a = 308$ et $b = 202$.

1. Quel est le plus grand commun diviseur d de a et b ?
2. Déterminer deux entiers u et v tels que l'on ait $au + bv = d$.
3. Expliciter l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que l'on ait $ax + by = d$.

Exercice 3. Notons G le groupe additif $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +)$.

1. Quels sont les ordres possibles des éléments de G ?
2. Quel est le nombre de sous-groupes de G ?
3. Quel est le nombre de générateurs de G ?
4. Expliciter l'ensemble des générateurs de G .
5. Le groupe produit $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ est-il isomorphe à G ?

Exercice 4. Soit $G = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ et p un nombre premier ≥ 5 . Notons $f : G \rightarrow G$ l'application définie pour tout $x \in G$ par l'égalité $f(x) = x^p$.

1. Montrer que f est un homomorphisme de groupes.
2. Montrer que f est un automorphisme de groupes.

Exercice 5. Soit G le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}, +, \times)$.

1. Quel est son ordre ? Expliciter ses éléments.
2. Quel est l'ordre de la classe de 2 dans G ?
3. Le groupe G est-il cyclique ?
4. Résoudre dans G l'équation $x^2 = 1$, ainsi que l'équation $y^3 = 1$.