# Anneaux de polynômes sur un corps

## Énoncés

**Exercice 1** – Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes $X^3 + X + 1$ et $X^2 + X + 1$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

**Exercice 2** – Montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 à coefficients dans un corps $K$ est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine dans $K$.

**Exercice 3** – Soit $p$ un nombre premier et notons $K$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le nombre de polynômes unitaires de degré 2 à coefficients dans $K$.
2. Montrer que si $f \in K[X]$ est unitaire, de degré 2 et réductible alors il s'écrit comme $f = (X - a)(X - b)$, avec $a, b \in K$ et $a \neq b$ ou $f = (X - a)^2$, avec $a \in K$ (indication : utiliser l'exercice précédent).
3. Déduire de la question précédente le nombre de polynômes unitaires, de degré 2 et irréductibles à coefficients dans $K$. Les énumérer explicitement pour $p = 2$ et $p = 3$.

**Exercice 4** – Soient $\theta$ un réel et $n$ un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + \sin(\theta)X)^n$ par $X^2 + 1$.

**Exercice 5** – Soient $K$ un corps, $f \in K[X]$ et $a, b \in K$, avec $a \neq b$.

1. Exprimer le reste de la division euclidienne de $f$ par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $a, b, f(a)$ et $f(b)$.
2. Exprimer le reste de la division euclidienne de $f$ par $(X - a)^2$ en fonction de $a, f(a)$ et $f'(a)$ (où $f'$ désigne le polynôme dérivé de $f$).

**Exercice 6** – Soient $K$ et $L$ deux corps, avec $K \subset L$. Considérons deux polynômes $f, g \in K[X]$, avec $f$ irréductible. Montrer que si $f$ et $g$ ont une racine commune dans $L$ alors $f$ divise $g$.

**Exercice 7** – Montrer qu'un polynôme non constant à coefficient dans $\mathbb{R}$ se factorise en produit de polynômes irréductibles de degré inférieur ou égal à 2. Déterminer la factorisation du polynôme $X^8 - 1$.

**Exercice 8**– Déterminer la factorisation en produit de facteurs irréductibles du polynôme $X^2 + 3X + 4 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ pour $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

**Exercice 9**– Soit $K$ un corps, $f \in K[X]$ un polynôme et notons $A$ le quotient $K[X]/(f)$.

1. Montrer qu'un élément de $A$ est non inversible si et seulement si c'est un diviseur de 0.
2. Fournir un exemple d'anneau possédant des éléments non inversibles qui ne sont pas des diviseurs de 0.

**Exercice 10** – Déterminer les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les nilpotents de l'anneau quotient $A = \mathbb{C}[X]/(X^3 - X^2)$.

**Exercice 11** – Soit $p$ un nombre premier et notons $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé par les éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{p}$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, l'écriture $x = a + b\sqrt{p}$ est unique.
3. Vérifier que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
4. Déterminer le noyau et l'image de l'homomorphisme $\phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{R}$ défini par $\phi(f) = f(\sqrt{p})$. En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ est isomorphe au quotient $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - p)$.
5. Montrer que si $p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts alors les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ ne sont pas isomorphes.