

Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Énoncés

Exercice 1 (Indicatrice d'Euler).

On appelle indicatrice d'Euler le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\varphi(n) = |\{a \mid 1 \leq a \leq n \text{ et } \text{pgcd}(a, n) = 1\}|$$

1. Rappelez le lien entre $\varphi(n)$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\varphi(p)$ pour p un nombre premier.
3. Montrer que si p est premier, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.
4. Trouver une formule pour $\varphi(pq)$, pour p et q premiers.
5. Calculer $\varphi(64)$, $\varphi(125)$, $\varphi(100)$, $\varphi(108)$.
6. Si n est impair, alors $\varphi(n) = \varphi(2n)$.
7. Si n est pair, alors $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$.
8. $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$.
9. $\varphi(n) = n/2$ si et seulement si $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
10. Soit $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Exprimer $\varphi(n)$ en fonction des p_i et des r_i .
11. Montrer que $\varphi(n)$ divise $n!$.
12. En déduire que pour tout entier a premier à n , on a $a^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$.
13. Montrer que $\sum_{d \mid n, d > 0} \varphi(d) = n$.

Indication : Considérer la partition $\sqcup_{d \mid n} \{x \mid \text{pgcd}(x, n) = d\}$.

Exercice 2. Notons G le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Quel est l'ordre de G .
2. Énumérer les éléments de G et déterminer leurs ordres respectifs.
3. Le groupe G est-il cyclique ?

Exercice 3.

1. La classe de 17 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
2. La classe de 18 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
3. La classe de 38 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
4. La classe de 42 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?

Exercice 4.

1. Quel est le nombre d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?
2. Quel est le nombre d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/401\mathbb{Z}$?