Anneaux

Solutions

Exercice 1 – Une des implications est immédiate : si $\mathfrak{a}$ est un idéal, pour tout $a, b \in \mathfrak{a}$ et tout $c \in A$, on a $bc \in \mathfrak{a}$ et, par conséquent $a + bc \in \mathfrak{a}$. Réciproquement, montrons tout d'abord que $\mathfrak{a}$ est un sous-groupe. Pour ce faire, au vu de l'exercice 4 de la feuille d'exercices sur les groupes, il suffit de montrer que, pour tout $a, b \in \mathfrak{a}$, on a $a - b \in \mathfrak{a}$, ce qui est immédiat en posant $c = -1$. Finalement, en posant $a = 0$, on en déduit que, pour tout $b \in \mathfrak{a}$ et tout $c \in A$, on a $bc \in \mathfrak{a}$, et $\mathfrak{a}$ est donc un idéal.

Exercice 2 –

1. Étant donnés $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{b}$, on a $a_i b_i \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ (car $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux de A) et, par conséquent $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ (car $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des sous-groupes de A). L'inclusion $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ est triviale, et, pour tout $a \in A$, on a l'identité $a = a + 0 \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ (car $0 \in \mathfrak{b}$), d'où l'inclusion $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} + b$. De manière analogue, on obtient $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ et on a bien l'inclusion $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

2. Une des implications étant triviales, supposons que $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ est un idéal. Si $\mathfrak{a}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{b}$, fixons un élément $a \in \mathfrak{a}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{b}$. Dans ce cas, pour tout $b \in \mathfrak{b}$, l'élément $c = a + b$ appartient à $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ (car c'est un idéal) et n'appartient pas à $\mathfrak{b}$ (sinon, il en serait de même pour $a = c - b$). On a donc $c \in \mathfrak{a}$ et, par conséquent $b = c - a \in \mathfrak{a}$, d'où l'inclusion $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.

3. On utilise le critère de l'exercice 1: soient $x = a + b$ et $y = a' + b'$ deux éléments de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, avec $a, a' \in \mathfrak{a}$ et $b + b' \in \mathfrak{b}$. Pour tout $c \in A$, on a alors $a'' = a + ca' \in \mathfrak{a}$ et $b'' = b + cb' \in \mathfrak{b}$ (car $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux) et donc $x + cy = a'' + b'' \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, ce qui montre que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est un idéal. Finalement, si $\mathfrak{c}$ est un idéal de A contenant $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$, pour tout $a \in \mathfrak{a}$ et tout $b \in \mathfrak{b}$, on a $a, b \in \mathfrak{c}$, d'où $a + b \in \mathfrak{c}$ ce qui amène à l'inclusion $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$.

4. La vérification du fait que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est un idéal et que c'est le plus grand idéal de A contenu dans $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est immédiate. En ce qui concerne $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, on utilise une fois de plus le critère de l'exercice 1 (on remarquera que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ est non vide, car il contient l'élément 0) : étant donnés deux éléments $x = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ et $y = a'_1 b'_1 + \cdots + a'_m b'_m$ de $\mathfrak{a}$, pour tout $c \in A$, on a $a''_i = ca'_i \in \mathfrak{a}$ (car $\mathfrak{a}$ est un idéal) et, par conséquent

$$x + cy = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n + a''_1 b'_1 + \cdots + a''_m b'_m \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b},$$

ce qui implique que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ est un idéal.

5. Les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant premiers entre eux, il existe $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in \mathfrak{b}$ tels que $a + b = 1$ (on peut d'ailleurs montrer que la coprimalité de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est équivalente à cette dernière condition). Dans ce cas, pour tout $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, on a les relations $c = ac + bc \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, d'où l'inclusion $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. L'inclusion $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ayant été vérifiée dans le point 1, les deux idéaux coïncident. Il est important de remarquer que généralement, les idéaux $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ sont distincts. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $A = \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 2\mathbb{Z}$, auquel cas on obtient les identités $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 4\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 2\mathbb{Z}$.

Exercice 3 –

1. Si a et b sont deux entiers non nuls et $|a| > 1$, on a les relations $|ab| = |a| \cdot |b| > 1$. Il s'en suit que si a est inversible alors on obtient l'inégalité $|a| \leq 1$, ce qui donne $a = \pm 1$ et finalement l'identité $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. L'anneau $\mathbb{Q}^\times$ étant un corps, on a $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

2. Un élément $x = (a, b) \in A \times B$ est inversible si et seulement s'il existe un élément $y = (c, d) \in A \times B$ tel que $xy = (a, b)(c, d) = (ac, bd) = (1, 1)$, ce qui se traduit par les identités $ac = 1$ et $bd = 1$, qui sont équivalentes à l'inversibilité de a et de b.

3. On rappelle que, par définition, si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, on a l'identité $f(1) = 1$. Dans ce cas, pour tout élément $a \in A^\times$, en notant b son inverse, on obtient les relations $f(a)f(b) = f(ab) = f(1) = 1$ et $f(b)$ est donc l'inverse de $f(a)$, d'où l'inclusion $f(A^\times) \subset B^\times$. En général, si f est surjectif, on n'a pas $f(A^\times) = B^\times$. En prenant par exemple $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec $p > 3$ premier, la projection canonique $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est surjective, mais $f(\mathbb{Z}^\times)$ (qui est d'ordre 2) est strictement contenu dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ (qui est d'ordre $p - 1 > 2$).

Exercice 4 –

1. Étant donnés $x, y \in \mathfrak{a}$, avec $x^n = y^m = 0$, pour tout $z \in A$, on a les identités

$$
\begin{aligned}
(x + zy)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} x^i (zy)^{n+m-i} = \\
&= y^m \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} x^i z^{n+m-i} y^{n-i} + x^n \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} x^{i-n} (zy)^{n+m-i} = 0.
\end{aligned}
$$

L'élément $x + zy$ appartient donc à $\mathfrak{a}$ et l'exercice 1 permet de conclure (on remarquera que $\mathfrak{a}$ est non vide, car il contient l'élément 0). Notons $\bar{x}$ la classe de $x \in A$ dans $A/\mathfrak{a}$. Supposons $\bar{x}$ nilpotent, soit $\bar{x}^n = 0$, ce qui revient à affirmer que $x^n = y \in \mathfrak{a}$. Si m est un entier tel que $y^m = 0$, on obtient alors les dentités $x^{nm} = y^m = 0$, d'où $x \in \mathfrak{a}$ et $\bar{x} = 0$.

2. Pour tout $a \in \mathfrak{a}$, avec $x^n = 0$, on a les identités

$$(1 + a)(1 - a + \cdots + (-1)^{n-1} a^{n-1}) = 1 - (-a)^n = 1 - (-1)^n a^n = 1$$

et l'élément $1 + a$ est donc inversible.

Exercice 5 – On remarquera que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, on a l'identité $\mathfrak{a} = A$ si et seulement si $1 \in \mathfrak{a}$. En effet, une des implications étant immédiate, si $1 \in \mathfrak{a}$, alors, pour tout $a \in A$, on a $a = a \cdot 1 \in \mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{a} = A$. Si A est un corps et $\mathfrak{a} \subset A$ est un idéal non nul, tout élément non nul $x \in \mathfrak{a}$ est inversible et on obtient donc les relations $1 = x^{-1}x \in \mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{a} = A$. Réciproquement, si les seuls idéaux de A sont 0 et A, pour tout élément non nul $x \in A$, l'idéal principal xA est non nul (car il contient x) et coïncide donc avec A, ce qui revient à affirmer qu'il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$, ou encore que x est inversible.

Exercice 6 – Soit $a \in A$ un élément non nul et considérons la chaine décroissante d'idéaux $aA \supset a^2A \supset \cdots \supset a^nA$. L'anneau A possédant un nombre fini d'idéaux, il existe un entier $n > 0$ tel que $a^nA = a^{n+1}A$. Dans ce cas, il existe un élément $b \in A$ tel que $a^n = a^{n+1}b$, ou encore $a^n(ab - 1) = 0$. L'anneau A étant intègre et l'élément a étant non nul, on obtient la relation $a^n \neq 0$, d'où l'identité $ab = 1$ et a est donc inversible. Tout élément non nul étant inversible, l'anneau A est un corps.

Exercice 7 – On peut procéder de trois manières différents:

1. Pour tout élément non nul $x \in A$, l'application $f : A \to A$ définie par $f(y) = xy$ est un homomorphisme injectif de groupes. En effet, pour tout $y, z \in A$, on a les identité $f(x+y) = x(y+z) = xy + xz = f(y) + f(z)$ et $f(y) = 0$ si et seulement si $xy = 0$, ce qui donne $y = 0$ car A est intègre et x est non nul. L'anneau A étant fini, l'homomorphisme f est alors surjectif et il existe donc $y \in A$ tel que $f(y) = xy = 1$, ce qui implique que x est inversible et A est alors un corps.

2. Pour tout élément non nul $x \in A$, le sous-ensemble $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ de A étant fini, il existe deux entiers n et m, avec $0 < n < m$, tels que $x^n = x^m$, auquel cas $x^n(x^{m-n} - 1) = 0$. L'anneau A étant intègre et x étant non nul, on a $x^n \neq 0$ et donc $x^{m-n} = 1$, ce qui implique que x est inversible, d'inverse x^{m-n-1}.

3. L'anneau A étant fini, il ne possède qu'un nombre fini de sous-ensembles et, à fortiori, un nombre fini d'idéaux. L'exercice précédent permet alors de conclure.

Exercice 8 –

1. Pour tout entier naturel n, on a les identités

$$\sigma(n) = \sigma(1 + \cdots (n) \cdots + 1) = \sigma(1) + \cdots (n) \cdots + \sigma(1) = n\sigma(1) = n$$

   Si n est un entier négatif, on en déduit alors les relations

$$0 = \sigma(n - n) = \sigma(n) + \sigma(-n) = \sigma(n) - n,$$

   et donc $\sigma(n) = n$. Finalement, pour $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, on obtient les égalités

$$\sigma(x) = \sigma\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\sigma(n)}{\sigma(m)} = \frac{n}{m} = x.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a l'identité $x = (\sqrt{x})^2$, d'où les relations

$$\sigma(x) = \sigma((\sqrt{x})^2) = \sigma(\sqrt{x})^2 \in \mathbb{R}_+.$$

3. Étant donnés deux réels x et y, avec $x \leq y$, le point précédent amène aux relations

$$\sigma(y) - \sigma(x) = \sigma(y - x) \geq 0$$

et l'application σ est donc croissante. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, soit $\delta \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < \delta \leq \varepsilon$. Si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient l'inégalité $|x - y| \leq \delta$, on obtient les relations

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 = \sigma(x - y)^2 = \sigma((x - y)^2) = \sigma(|x - y|^2) \leq \sigma(\delta^2) = \delta^2 \leq \varepsilon^2,$$

d'où l'inégalité $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \varepsilon$, ce qui montre la continuité de σ.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers x. Dans ce cas, la continuité de σ amène aux identités

$$\sigma(x) = \lim \sigma(u_n) = \lim u_n = x.$$

Exercice 9 –

1. Notons $\bar{a} \in A/\mathfrak{a}$ la classe d'un élément $a \in A$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal premier de A et supposons que $x, y \in A/\mathfrak{a}$ vérifient l'identité $xy = 0$. En posant $x = \bar{a}$ et $y = \bar{b}$, on obtient les relations $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = 0$, ce qui se traduit par $ab \in \mathfrak{a}$. L'idéal $\mathfrak{a}$ étant premier, on a alors $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$, ou encore $x = 0$ ou $y = 0$ et l'anneau $A/\mathfrak{a}$ est donc intègre. Réciproquement, si $A/\mathfrak{a}$ est intègre et $a, b \in A$ vérifient $ab \in \mathfrak{a}$, on obtient les identités $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b} = 0$, d'où $\bar{a} = 0$ ou $\bar{b} = 0$, ce qui est équivalent à $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$ et l'idéal $\mathfrak{a}$ est donc premier.

2. D'après le cours, le sous-ensemble

$$f^{-1}(\mathfrak{a}) = \{a \in A \mid f(a) \in \mathfrak{a}\}$$

de A est un idéal. Si $\mathfrak{a}$ est premier et $a, b \in A$ vérifient $ab \in f^{-1}(\mathfrak{a})$, on obtient les relations $f(a)f(b) = f(ab) \in \mathfrak{a}$, d'où $f(a) \in \mathfrak{a}$ ou $f(b) \in \mathfrak{a}$, ce qui se traduit par $a \in f^{-1}(\mathfrak{a})$ ou $b \in f^{-1}(\mathfrak{a})$ et l'idéal $f^{-1}(\mathfrak{a})$ est donc premier. De manière altérnative, en composant l'homomorphisme f avec la projection canonique $B \to B/\mathfrak{a}$, on obtient un homomorphisme $g : A \to B/\mathfrak{a}$ et on vérifie facilement que son noyau n'est autre que $f^{-1}(\mathfrak{a})$. Le théorème de factorisation pour les homomorphismes d'anneaux affirme alors que $g(A)$, qui est un sous-anneau de $B/\mathfrak{a}$, est isomorphe au quotient $A/f^{-1}(\mathfrak{a})$. Maintenant, si $\mathfrak{a}$ est premier, d'après le point précédent, l'anneau $A/\mathfrak{b}$ est intègre et il en est alors de même pour tous ses sous-anneaux. En particulier, $A/f^{-1}(\mathfrak{a})$ est intègre et $f^{-1}(\mathfrak{a})$ est donc premier.

Exercice 10 – Notons $\bar{a} \in A/\mathfrak{a}$ la classe de $a \in A$. Supposons $\mathfrak{a}$ maximal et soit $x = \bar{a} \in A/\mathfrak{a}$ un élément non nul, ce qui revient à affirmer que a n'appartient pas à $\mathfrak{a}$. Dans ce cas, l'idéal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + xA$ (cf. l'exercice 2) contient proprement $\mathfrak{a}$ (car $x \in \mathfrak{b}$ et $x \notin \mathfrak{a}$) et, par maximalité de $\mathfrak{a}$, on obtient la relation $1 \in \mathfrak{b}$, ce qui se traduit par l'existence de $b \in \mathfrak{a}$ et $c \in A$ tels que $b + ac = 1$, ce qui se traduit par $\bar{a}\bar{c} = 1$ et l'élément x est donc inversible. Réciproquement, si $A/\mathfrak{a}$ est un corps et $\mathfrak{b}$ est un idéal de A contenant proprement $\mathfrak{a}$, en fixant un élément a de $\mathfrak{b}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{a}$, lélément $\bar{a} \in A/\mathfrak{a}$ est non nul, donc inversible. Il existe alors $b \in A$ tel que $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = 1$, ce qui se traduit par la relation $c = ab - 1 \in \mathfrak{a}$. On en déduit que $1 = ab + c \in \mathfrak{b}$ (car $a \in \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$) et donc que $\mathfrak{b}$ coïncide avec A (cf. la solution de l'exercice 5), d'où la maximalité de $\mathfrak{a}$. Finalement, si $\mathfrak{a}$ est un idéal maximal de A, le quotient $A/\mathfrak{a}$ étant un corps, donc intègre, l'exercice précédent affirme que l'idéal $\mathfrak{a}$ est premier.