

---

## Arithmétique des entiers

---

### Énoncés

**Exercice 1** – Décomposer les entiers 2015 et 2016 en produit de nombres premiers

**Exercice 2** – Déterminer tous les diviseurs positifs de 12 et de  $2^8$ .

**Exercice 3** – Soit  $n \geq 2$  un entier et posons  $N = n!$ .

1. Montrer que les entiers  $N + 2, N + 3, \dots, N + n$  ne sont pas premiers.
2. Donner un exemple de 10 entiers consécutifs non premiers.

**Exercice 4** – L'effectif d'une école est compris entre 100 et 200 élèves. Si l'on range les élèves par 3, par 5 ou par 7, il reste toujours 2 élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans cette école ?

**Exercice 5** – Quel est le plus grand entier naturel dont le cube divise  $a = 2^4 \times 3^6 \times 7$  ?

**Exercice 6** – Déterminer tous les nombres premiers  $p$  tels que  $p$  divise  $2^p + 1$  (indication: utiliser le petit théorème de Fermat).

**Exercice 7** – Calculer le pgcd et le ppcm de 195 et 143.

**Exercice 8** – Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations suivantes:

1.  $4x + 9y = 1$ .
2.  $18x + 7y = 2$ .

**Exercice 9** – Soient  $a, b, x$  et  $y$  des entiers. Montrer que si l'entier  $ax + by > 0$  divise  $a$  et  $b$  alors c'est le pgcd de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 10** – Soient  $a, b, c$  et  $d$  des entiers. Démontrer les implications suivantes:

1.  $\text{pgcd}(a, b) = d \Rightarrow \text{pgcd}(ac, bc) = dc$ .
2.  $\text{pgcd}(a, b) = 1$  et  $\text{pgcd}(a, c) = 1 \Rightarrow \text{pgcd}(a, bc) = 1$ .
3.  $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \forall m, n \geq 2, \text{pgcd}(a^m, b^n) = 1$ .
4.  $\text{pgcd}(a, b) = d \Rightarrow \forall m \geq 2, \text{pgcd}(a^m, b^m) = d^m$ .

**Exercice 11** – Soient  $a$  et  $b$  deux entiers strictement positifs et posons  $m = \text{ppcm}(a, b)$ . Montrer qu'il existe un diviseur  $a'$  de  $a$ , un diviseur  $b'$  de  $b$ , tels que  $\text{pgcd}(a', b') = 1$  et  $m = a'b'$ .

**Exercice 12** – Soient  $a$  et  $b$  deux entiers. Montrer que l'on a l'identité

$$\text{pgcd}(a, b) \cdot \text{ppcm}(a, b) = |ab|.$$