

Partiel du ? octobre 2015

Durée 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Veillez préciser votre groupe de TD sur votre copie.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1

Les cinq questions sont indépendantes.

- 1) Posons $n = 9^{43}$.
 - 1.1) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^6 par 7 ?
 - 1.2) En déduire le reste de la division euclidienne de n par 7.
- 2) L'entier 133 est-il premier ?
- 3) Pour tout nombre premier p , calculer la valuation p -adique de 540.
- 4) Soit n un entier impair. Montrer que n^2 est congru à 1 modulo 8.
- 5) Déterminer l'écriture de 75 en base 2.

Exercice 2

Posons $a = 308$ et $b = 202$.

- 1) Quel est le plus grand commun diviseur d de a et b ?
- 2) Déterminer deux entiers x_0 et y_0 tels que l'on ait $ax_0 + by_0 = d$.
- 3) Expliciter l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que l'on ait $ax + by = d$.

Exercice 3

Notons G le groupe additif $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, +)$.

- 1) Quels sont les ordres possibles des éléments de G ?
- 2) Quel est le nombre de sous-groupes de G ?
- 3) Quel est le nombre de générateurs de G ?
- 4) Expliciter l'ensemble des générateurs de G .
- 5) Le groupe produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$ est-il isomorphe à G ?

Exercice 4

Soit G le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}, +, \times)$.

- 1) Quel est son ordre ? Expliciter ses éléments.
- 2) Quel est l'ordre de la classe de 3 dans G ?
- 3) Le groupe G est-il cyclique ?
- 4) Résoudre dans G l'équation $x^2 = \bar{1}$, ainsi que l'équation $x^3 = \bar{1}$.
- 5) Soit p un nombre premier ≥ 5 . Notons $f : G \rightarrow G$ l'application définie pour tout $x \in G$ par l'égalité

$$f(x) = x^p.$$

5.1) Montrer que f est un homomorphisme de groupes.

5.2) Montrer que f est une bijection de G sur G .
