

Partiel du 27 octobre 2016

Durée 2h

**Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.**

**Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.**

Veillez préciser votre groupe de TD sur votre copie.

Les quatre exercices sont indépendants.

### **Exercice 1**

Les quatre questions sont indépendantes.

- 1) Énoncer le théorème de la division euclidienne.
- 2) L'entier 401 est-il premier ?
- 3) Soient  $a$  et  $b$  des entiers relatifs tels que 7 divise  $a^2 + b^2$ . Montrer que  $a$  et  $b$  sont divisibles par 7.
- 4) Déterminer l'écriture de 94 en base 3.

### **Exercice 2**

Posons  $a = 4512$  et  $b = 4128$ .

- 1) Quel est le plus grand diviseur commun  $d$  de  $a$  et  $b$  ?
- 2) Déterminer deux entiers  $x_0$  et  $y_0$  tels que l'on ait  $ax_0 + by_0 = d$ .

### **Exercice 3**

Soit  $G$  le groupe additif  $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +)$ .

- 1) Quels sont les ordres possibles des éléments de  $G$  ?
- 2) Quel est l'ordre de l'élément  $\bar{8}$  ?
- 3) Expliciter un générateur de  $G$ . Quel est le nombre de générateurs de  $G$  ?
- 4) Le groupe produit  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$  est-il isomorphe à  $G$  ?

### **Exercice 4**

Soient  $p$  un nombre premier et  $A$  l'anneau  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, +, \times)$ . On note  $A^*$  le groupe des éléments inversibles de  $A$ .

- 1) L'anneau  $A$  est-il intègre ?

- 2) Quel est l'ordre de  $A^*$  ?
- 3) Expliciter un élément non nul de  $A$  qui ne soit pas dans  $A^*$ .
- 4) Soit  $\ell$  un nombre premier. Notons  $f : A^* \rightarrow A^*$  l'application définie pour tout  $x \in A^*$  par l'égalité

$$f(x) = x^\ell.$$

- 4.1) Montrer que  $f$  est un homomorphisme de groupes.
  - 4.2) Énoncer une condition, portant sur  $\ell$  et  $p$ , entraînant que  $f$  est une bijection.
  - 5) Supposons  $p = 3$ .
    - 5.1) Expliciter les éléments de  $A^*$ .
    - 5.2) Montrer que  $A^*$  est cyclique.
    - 5.3) Quels sont ses générateurs ?
-