Université PIERRE ET MARIE CURIE — 2015-2016
L2 Mathématiques — UE 2M220

Examen du 16 décembre 2015

Durée 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1

Les trois questions sont indépendantes.

1) Quel est le plus petit nombre premier plus grand que 120 ?

2) Soit a un entier naturel impair, non congru à 5 modulo 10.

   2.1) Montrer que a est premier avec 100.

   2.2) Pour tout entier naturel n multiple de 40, en déduire le reste de la division euclidienne de a^n par 100.

3) On se propose de déterminer le plus petit entier naturel N multiple de 23 et congru à 1 modulo 53.

   3.1) Trouver deux entiers u et v tels que $23u + 53v = 1$.

   3.2) En déduire N.

Exercice 2

Considérons l'anneau quotient

$$K = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X^2 + 2).$$

1) Montrer que K est un corps.

2) Quelle est sa caractéristique ? Quel est son cardinal ?

3) Quels sont les ordres possibles des éléments du groupe K^* ?

Soit α la classe de X modulo $(X^3 + X^2 + 2)$. On rappelle que $\mathcal{B} = (1, \alpha, \alpha^2)$ est une base du $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel K.

4) Quelles sont les coordonnées de l'inverse de $1 + \alpha$ dans $\mathcal{B}$?

5) Quelles sont les coordonnées de α^6 dans $\mathcal{B}$?

6) Quel est l'ordre de α dans K^* ?

Soit H le sous-groupe de K^* dont les éléments sont de la forme x^2 où $x \in K^*$.

7) Quel est l'ordre de H ?
8) Montrer que α appartient à H.
9) Déterminer les racines dans K du polynôme $Y^2 - \alpha$ de $K[Y]$. On explicitera leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
10) Montrer que 2α est un générateur de K^*.
11) Quel est le plus petit entier naturel n tel que $\alpha^2 = (2\alpha)^n$?

Exercice 3

1) Expliciter les polynômes irréductibles de degré 1 et de degré 2 dans l'anneau $\mathbb{F}_2[X]$.
2) Quel est le nombre de polynômes irréductibles de degré 4 dans $\mathbb{F}_2[X]$?
3) Expliciter les polynômes irréductibles de degré 4 dans $\mathbb{F}_2[X]$.
4) En déduire la factorisation de $X^{16} - X$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$.