Isométries - Synthèse

1 Notions nécéssaires

1.1 Translations

T_a est la translation de *vector* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}$.

Définition 1.
$T_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$T_a(z) = z + \boldsymbol{a}$

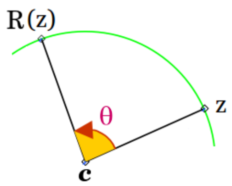
Remarques :

- Composition : $T_a \circ T_b = T_{a+b}$
- Inverse : $T_a^{-1} = T_{-a}$
- Sans points fixes : $T_a(z) \neq z, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

1.2 Rotations

$R_{c,\theta}$ est la rotation de *centre* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}$ et d'*angle* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$.

Définition 2.
$R_{c,\theta}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$R_{c,\theta}(z) = \boldsymbol{c} + (z - \boldsymbol{c}) \cdot \ e^{i\boldsymbol{\theta}}$
$R_{\boldsymbol{b},\theta}(z) = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot z + \underbrace{\mathbf{c}(1 - e^{i\boldsymbol{\theta}})}_{\boldsymbol{b}}$



Remarques :

- Composition : $R_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{\theta}} \circ R_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{\theta'}} = e^{i(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})} \cdot z + \underbrace{e^{i\boldsymbol{\theta'}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b'}}_{\boldsymbol{B}} = e^{i(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})} \cdot z + \boldsymbol{B}$

$$R_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{\theta}} \circ R_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{\theta'}} = \begin{cases} \text{Translation } \ T_{\boldsymbol{B}}, & \text{si } e^{i(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})} = 1 \\ \text{Rotation } R_{\boldsymbol{B},(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Inverse : $R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{\theta}}^{-1} = R_{\boldsymbol{c},-\boldsymbol{\theta}}$.
- Un seul point fixe : le centre $\boldsymbol{c}$, $R_{c,\theta}(c) = c$.

1.3 Symétries orthogonales

Σ_Δ est la symétrie orthogonale d'*axe* la droite $\boldsymbol{\Delta} = \{\boldsymbol{u} + \lambda e^{i\boldsymbol{\alpha}}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Définition 3.
$\Sigma_\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$\Sigma_\Delta(z) = \boldsymbol{u} + (\overline{z - \boldsymbol{u}}) \cdot \ e^{i2\boldsymbol{\alpha}}$
$\Sigma_\Delta(z) = e^{i2\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{z} + \underbrace{\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}} \cdot e^{i2\boldsymbol{\alpha}}}_{\boldsymbol{b}}$

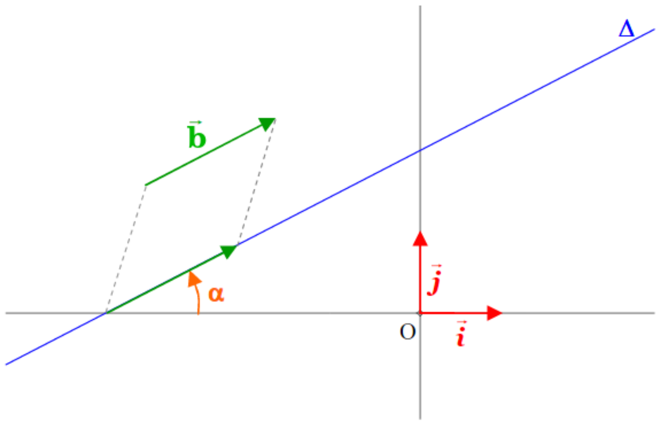
Remarques :

- Composition : voir le paragraphe **2**.
- Inverse : $\Sigma_\Delta^{-1} = \Sigma_\Delta$.
- Points fixes: la droite Δ, $\Sigma_\Delta(\Delta) = \Delta$.

1.4 Symétries glissées

$\Sigma_{\Delta,b}$ est la symétrie glissée d'axe $\boldsymbol{\Delta}$ et de vecteur de glissement $\boldsymbol{b}$
(b est un vecteur parallèle à Δ)

Définition 4.
$\Sigma_{\Delta,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$\Delta = \{\boldsymbol{u} + \lambda e^{i\boldsymbol{\alpha}}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$
$b = ke^{i\boldsymbol{\alpha}}, k \in \mathbb{R}$
$\Sigma_{\Delta,b}(z) = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}}(z) + \boldsymbol{b}$
$\Sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{B}}(z) = e^{i2\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{z} + \underbrace{\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}} \cdot e^{i2\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{B}}$



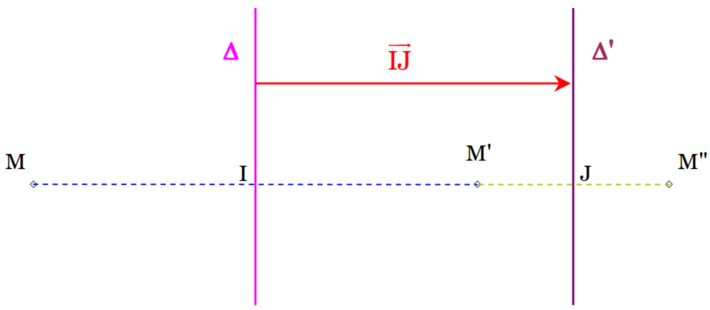
Remarques :

- $\Sigma_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{b}} = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}} \circ T_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{b}} \circ \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}}$.
- Inverse : $\Sigma^{-1}_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{b}} = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}} \circ T_{-\boldsymbol{b}} = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta},-\boldsymbol{b}}$.
- Sans points fixes.

2 Composée de deux symétries orthogonales

Deux situations peuvent se présenter suivant que les deux axes Δ, Δ' soient parallèles ou non. Nous considérons donc deux symétries axiales Σ_Δ et $\Sigma_{\Delta'}$. Intéressons-nous à $\Sigma_\Delta \circ \Sigma_{\Delta'}$. Ainsi que nous l'annoncions, deux cas peuvent se présenter :

2.0.1 Les axes sont parallèles



Si M est un point du plan alors on appelle $\Sigma_\Delta(M) = M'$ et $\Sigma_{\Delta'}(M') = M''$, donc on a

$$\Sigma_\Delta \circ \Sigma_{\Delta'}(M) = M'.$$

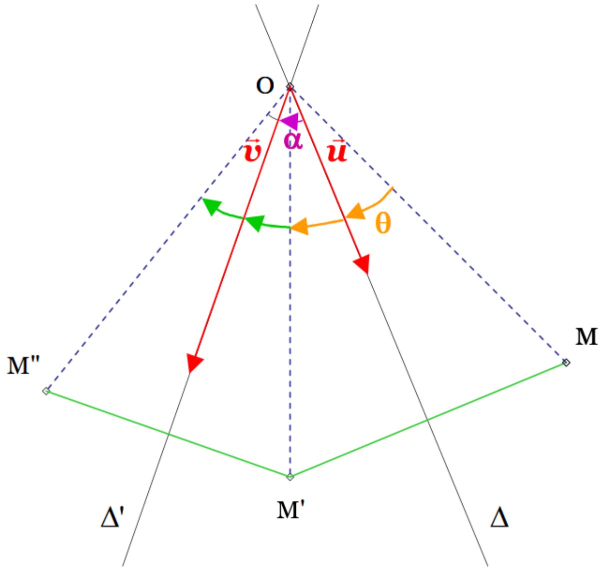
Il est clair que les points M, M' et M'' sont alignés. Le point I, intersection de l'axe Δ avec la droite (MM'), est aussi le milieu du segment $[MM']$. Donc $|MM'| = 2|IM'|$. De même $|M'M''| = 2|M'J|$. Utilisant ces deux égalités, nous pouvons écrire que :

$$|MM''| = |MM'| + |M'M''| = 2|IM'| + 2|M'J| = 2|IJ|.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ ne dépend pas du point M mais des seuls axes Δ et Δ'.
La composée $\Sigma_\Delta \circ \Sigma_{\Delta'}$ est donc la translation $T_{2\overrightarrow{IJ}}$.

Conclusion : La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.

2.0.2 Les deux axes sont sécants en un point O



Les axes Δ, Δ' se coupent en O. $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs des axes et α est la valeur de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.
Les points M, M' et M'' sont définis comme avant. Comme M' est le symétrique de M par rapport à la droite Δ, alors cette dernière est la médiatrice du segment $[MM']$. On rémarque que les triangles OMM' et $OM'M''$ sont isocèles en O.
Cela nous amène finallement à conclure que le point M'' est l'image du point M par la rotation $R_{O,\alpha}$ de centre O et d'angle 2α.

Conclusion : La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.

3 Isométries

Définition 5.
$u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$u(z) = \boldsymbol{a}\Sigma^n(z) + \boldsymbol{b}$
où $n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{U}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}$ et Σ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}$.

3.1 Isométries directes ($n =$ paire)

$f(z) = \boldsymbol{a}z + \boldsymbol{b}$

On a vu que une rotation $R_{c,\theta}$ a une expression complexe de la forme $R_{c,\theta}(\boldsymbol{z}) = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un réel non multiple de 2π.

Réciproquement, il est légitime de se demander si une isométrie directe $f(z) = \boldsymbol{a}z + \boldsymbol{b} = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot z + \boldsymbol{b}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$ et un vecteur $b \in \mathbb{C}$ quelconque ne cacherait pas une rotation ?

Si $\boldsymbol{a} \neq 1$, alors il est possible de diviser par $1 - \boldsymbol{a}$.
En posant $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{1-\boldsymbol{a}}$, $f(z)$ devient

$$f(z) = \boldsymbol{a} \cdot z + \boldsymbol{c}(1-\boldsymbol{a}) = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot z + \boldsymbol{c}(1 - e^{i\boldsymbol{\theta}}) = R_{c,\theta}(z)$$

Classification
Si f est une isométrie *directe* donnée par $f(z) = \boldsymbol{a} \cdot z + \boldsymbol{b}$, alors deux situations sont possibles :

$$f = \begin{cases} \text{Translation } \ T_{\boldsymbol{b}}, & \text{si } \boldsymbol{a} = 1 \\ \text{Rotation } R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{\theta}}, & \text{pour } \boldsymbol{a} = e^{i\boldsymbol{\theta}} \neq 1, \boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{1-\boldsymbol{a}}. \end{cases}$$

3.2 Isométries indirectes (n = impaire)

$f(z) = \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b}$

On a déjà écrit une symétrie glissé comme $\Sigma_{\alpha,B} = e^{i2\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{z} + \boldsymbol{B}$. Peut-on dire qu'une isométrie indirecte $f(z) = \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b}$ avec $a \in \mathbb{U}$, est géométriquement une symétrie glissée ?

Le fait que $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1 nous permet d'éxprimer $\boldsymbol{a}$ comme $\boldsymbol{a} = e^{i2\boldsymbol{\rho}}$ pour $\rho \in \mathbb{R}$, un nombre réel dont le double est un argument du $\boldsymbol{a}$. Ensuite, comme $e^{i\boldsymbol{\rho}}$ est non-nul (car $a \in \mathbb{U}$), on note $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{e^{i\boldsymbol{\rho}}}$ et $\boldsymbol{c_1} = Re(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{c_2} = Im(\boldsymbol{c})$. On obtient:

$$\begin{aligned} f(z) &= \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{c} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{c_1} + i\boldsymbol{c_2}) \\ &= \underbrace{e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}i\boldsymbol{c_2}}_{\text{Symétrie orthogonale}} + \underbrace{e^{i\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{c_1}}_{\boldsymbol{q}} \end{aligned}$$

On observe que si on note $\boldsymbol{p} = e^{i\rho}i\dfrac{c_2}{2}$ on peut exhiber la symétrie orthogonale:

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - \boldsymbol{q} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}i\boldsymbol{c_2} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}(\overline{z} + e^{-i\boldsymbol{\rho}}i\frac{\boldsymbol{c_2}}{2}) + e^{i\boldsymbol{\rho}}i\frac{\boldsymbol{c_2}}{2} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}(\overline{z} - \overline{\boldsymbol{p}}) + \boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{p} + (\overline{z - \boldsymbol{p}})e^{i2\boldsymbol{\rho}} \\ &= \Sigma_{\Delta} \text{ où } \Delta = \{\boldsymbol{p} + \lambda e^{i\boldsymbol{\rho}}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

On trouvera les deux cas qui dépendent de la valeur $\boldsymbol{q} = e^{i\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{c_1}$.
Classification
Si f est une isométrie *indirecte* donnée par $f(z) = \boldsymbol{a} \cdot \overline{z} + \boldsymbol{b}$, alors deux situations sont possibles :

$$f = \begin{cases} \text{Symétrie orthogonale } \Sigma_{\Delta}, & \text{si } \boldsymbol{q} = 0 \\ \text{Symétrie glissée } \Sigma_{\Delta,\boldsymbol{q}}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.3 Les points fixes d'une isométrie

Soit f est une isométrie :

- Si f n'a aucun point fixe, alors f est soit une translation, soit une symétrie glissée.
- Si f a un unique point fixe, alors f est une rotation.
- Si f a au moins deux points fixes (une droite fixe) alors f est une symétrie orthogonale.
- Si f a au moins trois fixes non alignés alors f est l'application identique id.

4 Interprétations géométriques :

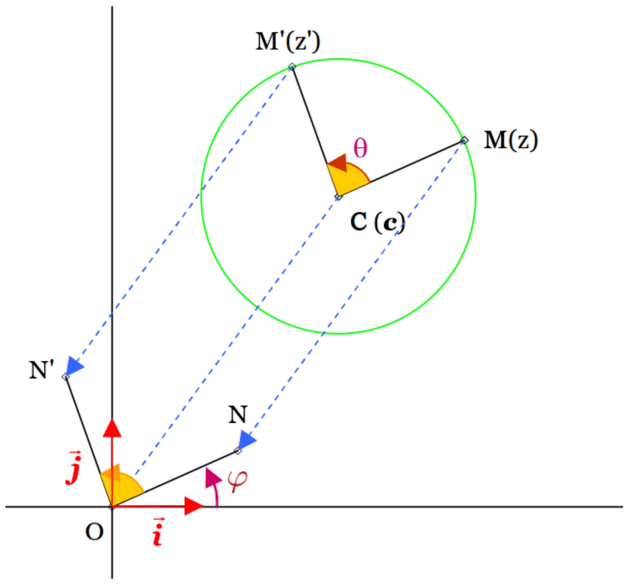
4.1 Rotations

$R_{c,\theta}$ est la rotation de *centre* $c \in \mathbb{C}$ et d'*angle* $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ qui peut s'écrire comme vecteur centré en c : $z = c + re^{i\varphi}$.
On note $R_{c,\theta}(z) = z'$.

Soit M le point du plan qui correspond à la valeur complexe $z = c + re^{i\varphi}$. Dans la figure, le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la rotation $R_{c,\theta}$.
On appelle C le centre de la rotation d'affixe $c \in \mathbb{C}$.

On appelle N et N' les images respectives des points M et M' par la translation de vecteur $-c$ (les vecteurs $z - c$ et $z' - c$ centrés en origine).

L'argument du nombre complexe $z - c$ est aussi la mesure de l'angle $(\vec{i}, ON) = \varphi$. D'où l'argument du nombre complexe $z' - c$ est $\varphi + \theta$, c'est-à-dire la mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, ON') = \varphi + \theta$.



Comme les distances CM et CM' sont égales et que la translation preserve les distances, nous pouvons écrire :

$$|ON| = |ON'| \Leftrightarrow |z - c| = |z' - c|.$$

Utilisant toutes ces importantes découvertes, nous pouvons donc écrire que :

$$z' - c \underbrace{= |z' - c| \cdot e^{i(\varphi+\theta)}}_{\text{écriture trigonométrique}} = \underbrace{|z - c| \cdot e^{i\varphi}}_{z-c} \cdot \ e^{i\theta} = (z - c) \cdot \ e^{i\theta}$$

On a trouvé la formule pour

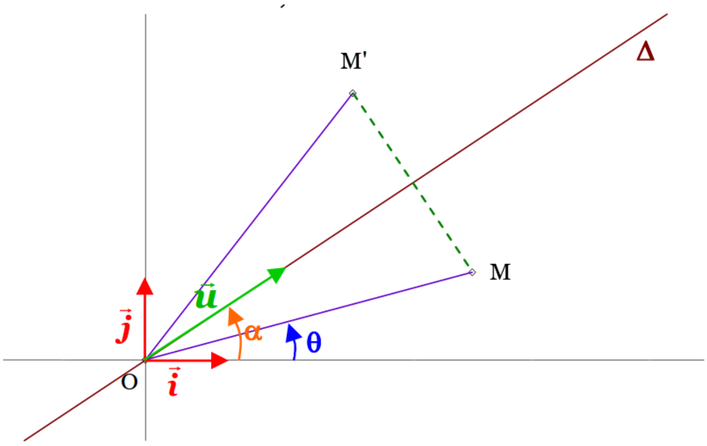
$$z' = R_{c,\theta}(z) = c + (z - c) \cdot \ e^{i\theta}.$$

4.2 Symétries orthogonales

Soit Δ une droite de $\mathbb{C}$. On note Σ_Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ.
Notons $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ l'angle de Δ avec la droite horizontale et soit $\boldsymbol{u} \in \Delta$ l'affixe complexe d'un point sur Δ. Alors on peut écrire $\Delta = \{\boldsymbol{u} + \lambda e^{i\boldsymbol{\alpha}}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$.
On va étudier deux cas:

4.2.1 L'axe de symétrie Δ passe par l'origine

Soit M le point du plan qui correspond à la valeur complexe $z = c + re^{i\theta}$.
Dans la figure, le point M' d'affixe z' est l'image du point M par la symétries orthogonale Σ_Δ.
Comme M' est le symétrique de M par rapport à la droite Δ, alors cette derniére est la médiatrice du segment $[MM']$ et le triangle OMM' est isocéle en O. Ceci implique que $OM = OM'$ et aussi l'égalité sur les angles $(\overline{OM}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \overline{OM}) = \alpha - \theta$.



Nous avons trouvé l'angle de OM' avec la droite horizontale: $2\alpha - \theta$. Les deux affixes z et z' de M et M' sont de modules égales, z a comme argument θ et z' $2\alpha - \theta$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} z' &= |z'| \cdot e^{i(2\alpha-\theta)} = |z| \cdot e^{i2\alpha} \cdot e^{-i\theta} \\ &= e^{i2\alpha} \cdot |z| \cdot e^{-i\theta} \\ &= e^{i2\alpha} \cdot \overline{z} \end{aligned}$$

On a trouvé la formule pour $\Sigma_\Delta(z) = e^{i2\alpha} \cdot \overline{z}$.

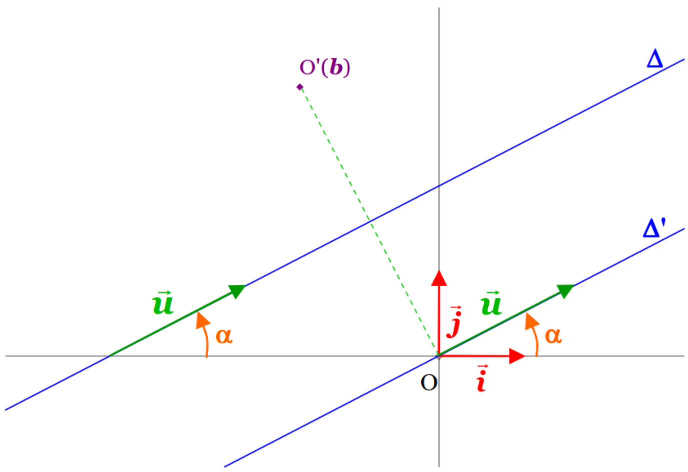
4.2.2 L'axe de symétrie Δ ne passe pas par l'origine

L'axe de symétrie Δ ne passant pas par l'origine, on appelle Δ', sa parallèle passant par O. Si u est le vecteur directeur de Δ, alors il l'est aussi pour Δ'.

Le point O' est le symétrique de l'origine O par rapport à l'axe Δ.

La symétrie orthogonale $\Sigma_{\Delta'}$ est sa propre réciproque, donc on a que :

$$\Sigma_\Delta = \Sigma_\Delta \circ \underbrace{\Sigma_{\Delta'} \circ \Sigma_{\Delta'}}_{id}$$



Comme leurs deux axes sont parallèles, on a vu que la composée des deux symétries Σ_Δ et $\Sigma_{\Delta'}$ est la translation de vecteur $\overline{OO'}$.
L'égalité précédente devient donc :

$$\Sigma_\Delta = T_{OO'} \circ \Sigma_{\Delta'}$$

Notons $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}$ l'affixe de O'. $\Sigma_{\Delta'}$ est une réflexion dont l'axe passe par l'origine. Son expression complexe est celle trouvée avant, ainsi pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Sigma_\Delta(z) &= T_b \circ \Sigma_{\Delta'}(z) \\ &= T_b(e^{i2\alpha} \cdot \overline{z}) \\ &= e^{i2\alpha} \cdot \overline{z} + b \end{aligned}$$

Nous avons trouvé l'expression $\Sigma_\Delta(z) = e^{i2\alpha} \cdot \overline{z} + b$.

On peut encore améliorer cette expression en cherchant à expliciter cette constante $\boldsymbol{b}$.