TD n° 4 - Solutions

1 Notions nécéssaires

1.1 Translations

T_a est la translation de *vector* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}$.

Définition 1.
$T_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$T_a(z) = z + \boldsymbol{a}$

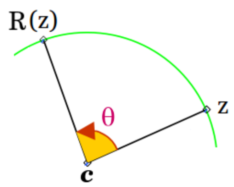
Remarques :

- Composition : $T_a \circ T_b = T_{a+b}$
- Inverse : $T_a^{-1} = T_{-a}$
- Sans points fixes : $T_a(z) \neq z, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

1.2 Rotations

$R_{c,\theta}$ est la rotation de *centre* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}$ et d'*angle* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$.

Définition 2.
$R_{c,\theta}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$R_{c,\theta}(z) = \boldsymbol{c} + (z - \boldsymbol{c}) \cdot \ e^{i\boldsymbol{\theta}}$
$R_{\boldsymbol{b},\theta}(z) = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot z + \underbrace{\boldsymbol{c}(1 - e^{i\boldsymbol{\theta}})}_{\boldsymbol{b}}$



Remarques :

- Composition : $R_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{\theta}} \circ R_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{\theta'}} = e^{i(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})} \cdot z + \underbrace{e^{i\boldsymbol{\theta'}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b'}}_{\boldsymbol{B}} = e^{i(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})} \cdot z + \boldsymbol{B}$

$$R_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{\theta}} \circ R_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{\theta'}} = \begin{cases} \text{Translation } \ T_{\boldsymbol{B}}, & \text{si } e^{i(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})} = 1 \\ \text{Rotation } R_{\boldsymbol{B},(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta'})}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Inverse : $R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{\theta}}^{-1} = R_{\boldsymbol{c},-\boldsymbol{\theta}}$.
- Un seul point fixe : le centre $\boldsymbol{c}$, $R_{c,\theta}(c) = c$.

1.3 Symétries orthogonales

Σ_Δ est la symétrie orthogonale d'*axe* la droite $\boldsymbol{\Delta} = \{\boldsymbol{u} + \lambda e^{i\boldsymbol{\alpha}}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Définition 3.
$\Sigma_\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$\Sigma_\Delta(z) = \boldsymbol{u} + (\overline{z - \boldsymbol{u}}) \cdot \ e^{i2\boldsymbol{\alpha}}$
$\Sigma_\Delta(z) = e^{i2\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{z} + \underbrace{\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}} \cdot e^{i2\boldsymbol{\alpha}}}_{\boldsymbol{b}}$

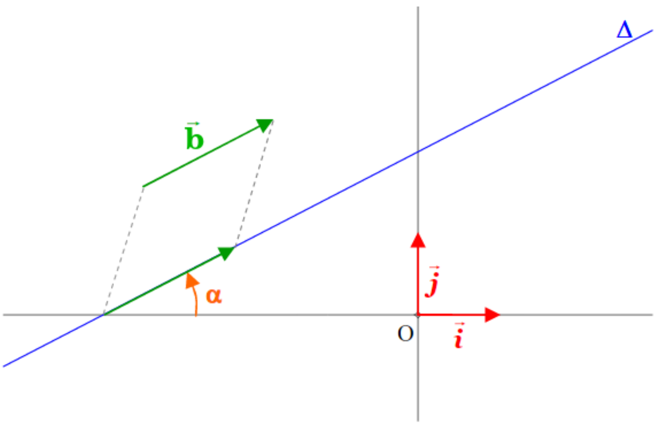
Remarques :

- Composition : voir le paragraphe **2**.
- Inverse : $\Sigma_\Delta^{-1} = \Sigma_\Delta$.
- Points fixes: la droite Δ, $\Sigma_\Delta(\Delta) = \Delta$.

1.4 Symétries glissées

$\Sigma_{\Delta,b}$ est la symétrie glissée d'*axe* $\boldsymbol{\Delta}$ et de *vecteur de glissement* $\boldsymbol{b}$
(b est un vecteur parallèle à Δ)

Définition 4.
$\Sigma_{\Delta,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$\Delta = \{\boldsymbol{u} + \lambda e^{i\boldsymbol{\alpha}}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$
$b = ke^{i\boldsymbol{\alpha}}, k \in \mathbb{R}$
$\Sigma_{\Delta,b}(z) = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}}(z) + \boldsymbol{b}$
$\Sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{B}}(z) = e^{i2\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{z} + \underbrace{\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}} \cdot e^{i2\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{B}}$



Remarques :
- $\Sigma_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{b}} = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}} \circ T_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{b}} \circ \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}}$.
- $\Sigma^2_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{b}} = \Sigma^2_{\boldsymbol{\Delta}} \circ T^2_{\boldsymbol{b}} = T_{2\boldsymbol{b}}$.
- Inverse : $\Sigma^{-1}_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{b}} = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta}} \circ T_{-\boldsymbol{b}} = \Sigma_{\boldsymbol{\Delta},-\boldsymbol{b}}$.
- Sans points fixes.

2 Composée de deux symétries orthogonales

Deux situations peuvent se présenter suivant que les deux axes Δ, Δ' soient parallèles ou non. Nous considérons donc deux symétries axiales Σ_Δ et $\Sigma_{\Delta'}$. Intéressons-nous à $\Sigma_\Delta \circ \Sigma_{\Delta'}$.

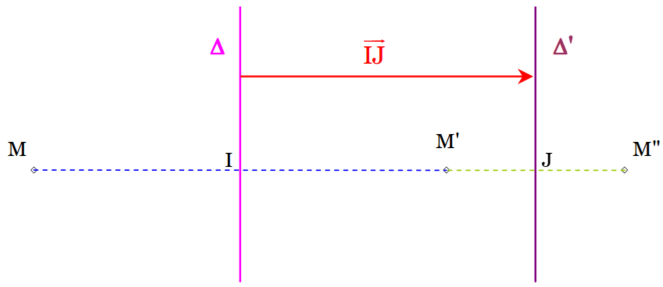
2.0.1 Les axes sont parallèles

Si M est un point du plan alors on appelle $\Sigma_\Delta(M) = M'$ et $\Sigma_{\Delta'}(M') = M''$. On a que :

$$|MM''| = |MM'| + |M'M''| = 2|IM'| + 2|M'J|$$

$$|MM''| = 2|IJ|.$$

La composée $\Sigma_\Delta \circ \Sigma_{\Delta'}$ est donc la translation $T_{2\overrightarrow{IJ}}$.



Conclusion : La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.

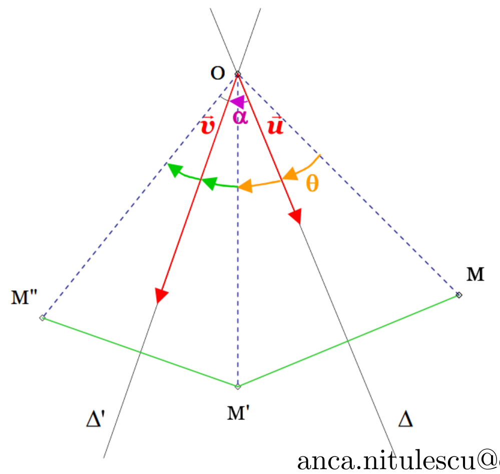
2.0.2 Les deux axes sont sécants en un point O

Les axes Δ, Δ' se coupent en O.

On rémarque que les triangles OMM' et $OM'M''$ sont isocèles en O.

Cela nous amène finallement à conclure que le point M'' est l'image du point M par la rotation $R_{O,\alpha}$ de centre O et d'angle 2α.

Conclusion : La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.



3 Exercices

Glossaire: On note $\Sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite des réels, T_a la translation par a et R_θ la rotation d'angle θ dans le sens anti-horaire autour de l'origine.

Exercice 1. a) Montrer les formules suivantes
1. $\Sigma \circ R_\theta = R_{-\theta} \circ \Sigma$.
2. $\Sigma \circ T_a = T_{\overline{a}} \circ \Sigma$.
3. $R_\theta \circ T_a = T_{R_\theta(a)} \circ R_\theta$.
b) En déduire que l'ensemble des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ayant la forme

$$T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m, \quad a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$$

est un sous groupe de $S_{\mathbb{C}}$.

Exercice 2. 1. Une rotation d'angle π est dite un demi-tour. Montrer que la composée de deux demi-tours est une translation.
2. Montrer que si $u \in \mathbb{I}$ est indirecte, alors u^2 est une translation.

Exercice 3.
1. On suppose que $u \in \mathbb{I} \setminus \{\mathrm{id}\}$ est directe. Montrer que u est une rotation si et seulement si il existe un $c \in \mathbb{C}$ fixé par u.

Solution : a) Supposons d'abord que u est une rotation. Toute rotation a comme point fixe son centre.
b) Prouvons maintenant la réciproque : On suppose qu'il existe un $c \in \mathbb{C}$ tel que $u(c) = c$. Comme u est une isométrie directe, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on peut écrire

$$u(z) = az + b.$$

Évaluée en son point fixe c cela donne :

$$u(c) = a\boldsymbol{c} + b = \boldsymbol{c}$$

D'après ceci on obtient $b = \boldsymbol{c} - a\boldsymbol{c}$.
Le fait que $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1 nous permet d'éxprimer $\boldsymbol{a}$ comme $\boldsymbol{a} = e^{i\boldsymbol{\alpha}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, un nombre réel. On sait d'avantage que $u \neq \mathrm{id}$, donc $a \neq 1$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$u(z) = e^{i\boldsymbol{\alpha}} z + \boldsymbol{c} - e^{i\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} + (z - \boldsymbol{c}) e^{i\boldsymbol{\alpha}} = R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{\alpha}}(z).$$

Cela montre que u est la rotation de centre $\boldsymbol{c}$ et d'angle $\boldsymbol{\alpha}$, noté $R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{\alpha}}$.

2. On suppose que $u \in \mathbb{I}\backslash\{\mathrm{id}\}$ est indirecte. Montrer que u est une symétrie orthogonale si et seulement si il existe un $c \in \mathbb{C}$ fixé par u.

Solution : a) Supposons d'abord que u est une symétrie orthogonale. Toute symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ a une infinité de points fixes, plus précissement, tout son axe Δ.
b) Réciproquement : On suppose qu'il existe un $c \in \mathbb{C}$ tel que $u(c) = c$. Comme u est une isométrie indirecte, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on peut écrire

$$u(z) = a\overline{z} + b.$$

Évaluée en son point fixe c cela donne :

$$u(c) = a\overline{\boldsymbol{c}} + b = \boldsymbol{c}$$

D'après ceci on obtient $b = \boldsymbol{c} - a\overline{\boldsymbol{c}}$.
Le fait que $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1 nous permet d'éxprimer $\boldsymbol{a}$ comme $\boldsymbol{a} = e^{i\boldsymbol{\alpha}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, un nombre réel.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$u(z) = e^{i\boldsymbol{\alpha}}\overline{z} + \boldsymbol{c} - e^{i\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} + (\overline{z} - \overline{\boldsymbol{c}})e^{i\boldsymbol{\alpha}} = \Sigma_\Delta(z).$$

Cela montre que u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta = \{\boldsymbol{c} + \lambda e^{i\boldsymbol{\alpha}}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

3. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto \overline{z} + i$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

Solution : L'isométrie $u : z \mapsto \overline{z} + i$ est indirecte, donc elle peut être soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissée. (voir Annexe)

Méthode 1 :
Trouvons d'abord les points fixes de l'isométrie u :

$$\begin{aligned} u(z) &= z \\ \overline{z} + i &= z \\ Re(z) - iIm(z) + i &= Re(z) + iIm(z) \\ 2iIm(z) - i &= 0 \\ Im(z) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cela nous donne l'équation d'une droite ($y = 1/2$) parallèle à la droite des réels $\mathbb{R}$. Donc les points fixes de u sont celle appartenant à une droite $\Delta = \{\frac{i}{2} + \lambda e^{i\pi}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$.
On en déduit que u est une symétrie orthogonale d'axe Δ.

$$u(z) = \Sigma_\Delta(z) = \frac{i}{2} + (\overline{z} - \frac{-i}{2})e^{i2\pi}$$

Méthode 2 :

Trouvons une écriture qui nous aide à repérer la nature de l'isométrie u.

$u(z) = \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{a} = e^{i2\pi} = 1$ et $\boldsymbol{b} = i$. Ensuite, en posant $\boldsymbol{c} = \dfrac{i}{e^{i\pi}} = -i$, on remarque que $\boldsymbol{c_1} = Re(\boldsymbol{c}) = 0$, donc on doit avoir forcement une symétrie orthogonale. (voir Annexe)

On écrit:

$$\begin{aligned}
u(z) &= e^{i2\pi}\overline{z} + i \\
&= e^{i2\pi}\overline{z} + (-i)e^{i\pi} \\
&= e^{i2\pi}(\overline{z} - e^{-i\pi}\frac{i}{2}) - e^{i\pi}\frac{i}{2} \\
&= \boldsymbol{p} + (\overline{z - \boldsymbol{p}})e^{i2\pi} \qquad \text{pour } \boldsymbol{p} = -e^{i\pi}\frac{i}{2} \quad \left(\overline{\boldsymbol{p}} = -e^{-i\pi}\frac{-i}{2} = e^{-i\pi}\frac{i}{2}\right) \\
&= \Sigma_\Delta(z) \text{ symétrie orthogonale d'axe } \Delta = \{\boldsymbol{p} + \lambda e^{i\pi}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

4. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto \overline{z} + 2i + 1$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

Solution : **Méthode 1 :**

Trouvons d'abord les points fixes de l'isométrie u :

$$\begin{aligned}
u(z) &= z \\
\overline{z} + 2i + 1 &= z \\
Re(z) - iIm(z) + 2i + 1 &= Re(z) + iIm(z) \\
2iIm(z) - 2i - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Cette équation n'a pas de solutions pour $Im(z) \in \mathbb{R}$. On conclue que u n'a pas de points fixes, donc il s'agit d'une symétrie glissée. D'après la remarque $\Sigma^2_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{b}} = T_{2\boldsymbol{b}}$, on peut trouver son vecteur de glissement $\boldsymbol{b}$ en calculant u^2. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$ les égalités :

$$u^2(z) = (\overline{\overline{z} + 2i + 1}) + 2i + 1 = z + 2 = T_{\boldsymbol{2}}(z) \ \Rightarrow\ 2\boldsymbol{b} = 2 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{b} = 1$$

On peut maintenant facilement rémarquer que $u \circ T_{-b} = \Sigma_\Delta$ est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta = \{i + \lambda e^{i\pi}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et donc on a une formule de u :

$$u(z) = \Sigma_{\Delta,b}(z) = i + (\overline{z} - \overline{i})e^{i2\pi} + 1$$

Méthode 2 :

Comme avant, trouvons une autre écriture de l'isométrie u.

$u(z) = \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{a} = e^{i2\pi} = 1$ et $\boldsymbol{b} = 2i + 1$. Ensuite, en posant $\boldsymbol{c} = \dfrac{2i+1}{e^{i\pi}} = -2i - 1$, on remarque que $\boldsymbol{c_1} = Re(\boldsymbol{c}) = -1 \neq 0$, donc on doit trouver une symétrie glissée. (voir Annexe)

On écrit:

$$\begin{aligned}
u(z) &= e^{i2\pi}\overline{z} - (2i + 1)e^{i\pi} \\
&= e^{i2\pi}(\overline{z} - e^{-i\pi}i) - e^{i\pi}i - e^{i\pi} \\
&= \boldsymbol{p} + (\overline{z - \boldsymbol{p}})e^{i2\pi} + \boldsymbol{q} \qquad \text{pour } \boldsymbol{p} = -e^{i\pi}i \ \left(\overline{\boldsymbol{p}} = e^{-i\pi}i\right) \quad \text{et } \boldsymbol{q} = -e^{i\pi} \\
&= \Sigma_{\Delta,\boldsymbol{q}} \text{ symétrie glisée d'axe } \Delta = \{\boldsymbol{p} + \lambda e^{i\pi}\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \text{ et vecteur } \boldsymbol{q} = -e^{i\pi}.
\end{aligned}$$

5. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto -i\overline{z} + 2 - i$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

Solution : Voir Annexe pour la méthode générale.

Méthode 1 :

On resout l'équation qui nous donne **les points fixes** de l'isométrie u :

$$\begin{aligned} u(z) &= z \\ -i\overline{z} + 2 - i &= z \\ -iRe(z) - Im(z) + 2 - i &= Re(z) + iIm(z) \\ 0 &= (Re(z) + Im(z) - 2) + i\,(Im(z) + Re(z) + 1)\,. \end{aligned}$$

On trouve le système :

$$\begin{cases} Re(z) + Im(z) - 2 = 0 \\ Re(z) + Im(z) + 1 = 0 \end{cases}$$

qui n'a pas de solutions pour $Re(z), Im(z) \in \mathbb{R}$. On conclue que u n'a pas de points fixes, donc il s'agit d'une symétrie glissée.

Pour trouver son vecteur de glissement $\boldsymbol{b}$ on calcule $u^2 = T_{2\boldsymbol{b}}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a les égalités :

$$\begin{aligned} u^2(z) &= -i(\overline{-i\overline{z} + 2 - i}) + 2 - i \\ &= -i(iz + 2 + i) + 2 - i \\ &= z - 2i + 1 + 2 - i \\ &= z - 3i + 3 \\ T_{2\boldsymbol{b}}(z) &= z - 3i + 3 \\ \Rightarrow\ 2\boldsymbol{b} &= -3i + 3 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(3 - 3i) \end{aligned}$$

On trouve maintenant l'axe de la symétrie orthogonale $u \circ T_{-\boldsymbol{b}} = \Sigma_\Delta$:

$$\begin{aligned} u \circ T_{-\boldsymbol{b}}(z) &= -i\overline{z} + 2 - i - \frac{1}{2}(3 - 3i) \\ &= -i\overline{z} + \frac{1}{2}(1 + i) \end{aligned}$$

Il faut que $u \circ T_{-\boldsymbol{b}}$ soit la symétrie orthogonale d'axe parallèle au vecteur $\boldsymbol{b}$, qu'on notera $\boldsymbol{\Delta} = \{\boldsymbol{p} + \lambda e^{-i\pi/4}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ pour une valeur $\boldsymbol{p} \in \Delta$ qu'on détérminera :

$$\begin{aligned} u \circ T_{-\boldsymbol{b}}(z) &= \boldsymbol{p} + (\overline{z} - \overline{\boldsymbol{p}})e^{-i\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}(1 + i) + (\overline{z} - \frac{1}{4}\overline{(1 + i)})e^{-i\pi/2} \end{aligned}$$

Ensuite on choisit $\boldsymbol{p} = \frac{1}{4}(1 + i)$ sur Δ, ce qui nous permet d'écrire :

$$u(z) = \frac{1}{4}(1 + i) + (\overline{z} - \frac{1}{4}\overline{(1 + i)})e^{-i\pi/2} + \frac{1}{2}(3 - 3i) = \Sigma_{\Delta,\boldsymbol{b}}.$$

Méthode 2 :
Trouvons la nature de u : $u(z) = \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{a} = e^{-i\pi/2} = -i$ et $\boldsymbol{b} = 2 - i$.
En posant $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{e^{-i\pi/4}} = \dfrac{2-i}{e^{-i\pi/4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(2-i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(3+i)$, on remarque que $\boldsymbol{c_1} = Re(\boldsymbol{c}) \neq 0$, donc u est une symétrie glissée.
On écrit:

$$\begin{aligned}
u(z) &= e^{-i\pi/2} \cdot \overline{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}(3+i)e^{-i\pi/4} \qquad \text{car } \ \boldsymbol{b} = 2 - i = \boldsymbol{c} \cdot e^{-i\pi/4} \\
&= e^{-i\pi/2}(\overline{z} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\pi/4}i) + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\pi/4}i + 3\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4} \\
&= \boldsymbol{p} + (\overline{z - \boldsymbol{p}})e^{i2\pi} + \boldsymbol{q} \qquad \text{pour } \boldsymbol{p} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\pi/4}i \ \text{ et } \ \boldsymbol{q} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4} \\
&= \Sigma_{\Delta,\boldsymbol{q}} \text{ symétrie glisée d'axe } \Delta = \{\boldsymbol{p} + \lambda e^{i\pi/4}\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \text{ et vecteur } \boldsymbol{q}.
\end{aligned}$$

6. On sait que $T_a \circ \Sigma$ est une symétrie glissée pour tout $a \in \mathbb{R}$. Vrai ou faux: $T_a \circ \Sigma$ est une symétrie orthogonale pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Solution : Dans le prémier cas, le vecteur de translation $a \in \mathbb{R}$ est parallèle à l'axe $\mathbb{R}$ de la symétrie Σ, donc la composée $T_a \circ \Sigma$ donne une symétrie glisée. (Une autre remarque est que dans ce cas les deux isométries commutent $T_a \circ \Sigma(z) = \Sigma \circ T_a(z),\ \forall z \in \mathbb{C}$.)
Cela ne reste pas valable pour le cas où $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donc pas parallèle à l'axe $\mathbb{R}$ de Σ.
Voyons le points fixes de $T_a \circ \Sigma$ pour $a = ib,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
T_a \circ \Sigma(z) &= z \\
\overline{z} + ib &= z \\
Re(z) - iIm(z) + ib &= Re(z) + iIm(z) \\
0 &= i(2Im(z) - b) \\
Im(z) &= \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

On obtient une infinité de points fixes, qui correspond à une droite d'équation $(y = b/2)$ parallèle à $\mathbb{R}$, qu'on notera $\Delta = \{ib/2 + \lambda e^{i\pi}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (pour un point d'affixe $ib/2$ qu'on a choisi sur la droite).
On en déduit que $T_a \circ \Sigma$ est une symétrie orthogonale d'axe Δ.

$$T_a \circ \Sigma(z) = \overline{z} + ib = i\frac{b}{2} + (\overline{z} - \overline{i}\frac{b}{2})e^{i2\pi} = \Sigma_\Delta(z).$$

Exercice 5. *Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On écrit $\mathbb{I}(X) = \{u \in \mathbb{I} : u(X) = X\}$. Montrer que $\mathbb{I}(X)$ est un sous-groupe de $\mathbb{I}$.*

Solution :

- Il est clair que $id \in \mathbb{I}(X)$ car $id(X) = X$.
- Si g et h sont deux éléments de $\mathbb{I}(X)$ (ils satisfont la condition $g(x) = X, h(X) = X$), alors

$$g \circ h(X) = g(h(X)) = g(X) = X, \text{ donc } \ g \circ h \in \mathbb{I}(X).$$

- Si $g \in \mathbb{I}(X)$, alors $g(X) = X$ et en composant par l'application inverse g^{-1} on a que $g^{-1}(g(X)) = X = g^{-1}(X)$, ce qui equivaut à $g^{-1} \in \mathbb{I}(X)$.

Cela nous montre que $\mathbb{I}(X)$ est un sous-groupe de $\mathbb{I}$.

Annexe

4 Isométries - nature et éléments

Définition 5.
$u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$u(z) = \boldsymbol{a}\Sigma^n(z) + \boldsymbol{b}$
où $n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{U}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}$ et Σ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}$.

4.1 Isométries directes ($n =$ paire)

$f(z) = \boldsymbol{a}z + \boldsymbol{b}$

On a vu que une rotation $R_{c,\theta}$ a une expression complexe de la forme $R_{c,\theta}(\boldsymbol{z}) = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un réel non multiple de 2π.

Réciproquement, il est légitime de se demander si une isométrie directe $f(z) = \boldsymbol{a}z + \boldsymbol{b} = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot z + \boldsymbol{b}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$ et un vecteur $b \in \mathbb{C}$ quelconque ne cacherait pas une rotation ?

Si $\boldsymbol{a} \neq 1$, alors il est possible de diviser par $1 - \boldsymbol{a}$.
En posant $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{1-\boldsymbol{a}}$, $f(z)$ devient

$$f(z) = \boldsymbol{a} \cdot z + \boldsymbol{c}(1 - \boldsymbol{a}) = e^{i\boldsymbol{\theta}} \cdot z + \boldsymbol{c}(1 - e^{i\boldsymbol{\theta}}) = R_{c,\theta}(z)$$

Classification
Si f est une isométrie *directe* donnée par $f(z) = \boldsymbol{a} \cdot z + \boldsymbol{b}$, alors deux situations sont possibles :

$$f = \begin{cases} \text{Translation } \; T_{\boldsymbol{b}}, & \text{si } \boldsymbol{a} = 1 \\ \text{Rotation } R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{\theta}}, & \text{pour } \boldsymbol{a} = e^{i\boldsymbol{\theta}} \neq 1, \boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{1-\boldsymbol{a}}. \end{cases}$$

4.2 Isométries indirectes ($n =$ impaire)

$f(z) = \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b}$

On a déjà écrit une symétrie orthogonale comme $\Sigma_\Delta(z) = e^{i2\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{z} + \boldsymbol{b}$, et une symétrie glissé comme $\Sigma_{\Delta,B} = e^{i2\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{z} + \boldsymbol{B}$. Peut-on facilement distinguer si une isométrie indirecte $f(z) = \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b}$ avec $a \in \mathbb{U}$, est géométriquement une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée ?

Le fait que $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1 nous permet d'éxprimer $\boldsymbol{a}$ comme $\boldsymbol{a} = e^{i2\boldsymbol{\rho}}$ pour $\rho \in \mathbb{R}$, un nombre réel dont le double est un argument du $\boldsymbol{a}$. Ensuite, comme $e^{i\boldsymbol{\rho}}$ est non-nul (car

$a \in \mathbb{U}$), on note $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{e^{i\boldsymbol{\rho}}}$ et $\boldsymbol{c_1} = Re(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{c_2} = Im(\boldsymbol{c})$. On obtient:

$$\begin{aligned} f(z) &= \boldsymbol{a}\overline{z} + \boldsymbol{b} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{c} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{c_1} + i\boldsymbol{c_2}) \\ &= \underbrace{e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}i\boldsymbol{c_2}}_{\text{Symétrie orthogonale}} + \underbrace{e^{i\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{c_1}}_{\boldsymbol{q}} \end{aligned}$$

On observe que si on note $\boldsymbol{p} = e^{i\rho}i\dfrac{c_2}{2}$ on peut exhiber la symétrie orthogonale:

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - \boldsymbol{q} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}\overline{z} + e^{i\boldsymbol{\rho}}i\boldsymbol{c_2} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}(\overline{z} + e^{-i\boldsymbol{\rho}}i\frac{\boldsymbol{c_2}}{2}) + e^{i\boldsymbol{\rho}}i\frac{\boldsymbol{c_2}}{2} \\ &= e^{i2\boldsymbol{\rho}}(\overline{z} - \overline{\boldsymbol{p}}) + \boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{p} + (\overline{z - \boldsymbol{p}})e^{i2\boldsymbol{\rho}} \\ &= \Sigma_\Delta \text{ où } \Delta = \{\boldsymbol{p} + \lambda e^{i\boldsymbol{\rho}}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

On trouvera les deux cas qui dépendent de la valeur $\boldsymbol{q} = e^{i\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{c_1}$.

Classification

Si f est une isométrie *indirecte* donnée par $f(z) = \boldsymbol{a} \cdot \overline{z} + \boldsymbol{b}$, alors deux situations sont possibles :

$$f = \begin{cases} \text{Symétrie orthogonale } \Sigma_\Delta, & \text{si } \boldsymbol{q} = 0 \\ \text{Symétrie glissée } \Sigma_{\Delta,\boldsymbol{q}}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.3 Les points fixes d'une isométrie

Soit f est une isométrie :

- Si f n'a aucun point fixe, alors f est soit une translation, soit une symétrie glissée.
- Si f a un unique point fixe, alors f est une rotation.
- Si f a au moins deux points fixes (une droite fixe) alors f est une symétrie orthogonale.
- Si f a au moins trois points fixes non alignés alors f est l'application identique id.