
TD n° 4

Glossaire: On note $\Sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite des réels, T_a la translation par a et R_θ la rotation d'angle θ dans le sens anti-horaire autour de l'origine.

Exercice 1. a) Montrer les formules suivantes

1. $\Sigma \circ R_\theta = R_{-\theta} \circ \Sigma$.
2. $\Sigma \circ T_a = T_{\bar{a}} \circ \Sigma$.
3. $R_\theta \circ T_a = T_{R_\theta(a)} \circ R_\theta$.

b) En déduire que l'ensemble des bijections de \mathbb{C} dans \mathbb{C} ayant la forme

$$T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m, \quad a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$$

est un sous groupe de $S_{\mathbb{C}}$.

Exercice 2. 1. Une rotation d'angle π est dite un demi-tour. Montrer que la composée de deux demi-tours est une translation.

2. Montrer que si $u \in \mathbb{I}$ est indirecte, alors u^2 est une translation.

Exercice 3. 1. On suppose que $u \in \mathbb{I} \setminus \{\text{id}\}$ est directe. Montrer que u est une rotation si et seulement si il existe un $c \in \mathbb{C}$ fixé par u .

2. On suppose que $u \in \mathbb{I} \setminus \{\text{id}\}$ est indirecte. Montrer que u est une symétrie orthogonale si et seulement si il existe un $c \in \mathbb{C}$ fixé par u .

3. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto \bar{z} + i$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.

Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

4. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto \bar{z} + 2i + 1$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

5. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto -i\bar{z} + 2 - i$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

6. On sait que $T_a \circ \Sigma$ est une symétrie glissée pour tout $a \in \mathbb{R}$. Vrai ou faux: $T_a \circ \Sigma$ est une symétrie orthogonale pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 4 (La conjugaison dans \mathbb{I}).

1. Montrer que $T_a \circ R_\theta \circ T_a^{-1}$ est la rotation autour de a d'angle θ .

2. Montrer que pour chaque $u \in \mathbb{I}$, la composée $u \circ \Sigma_\Delta \circ u^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $u(\Delta)$.

3. Utiliser la question 2 pour écrire sous la forme $z \mapsto a\Sigma(z) + b$ la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 3 = 0\}$.

4. Vrai ou faux: Si g est une symétrie glissée, alors $u \circ g \circ u^{-1}$ est aussi une symétrie glissée.

Exercice 5. Soit X un sous-ensemble de \mathbb{C} . On écrit

$$\mathbb{I}(X) = \{u \in \mathbb{I} : u(X) = X\}.$$

Montrer que $\mathbb{I}(X)$ est un sous-groupe de \mathbb{I} .

Exercice 6 (Sous-groupes standards de \mathbb{I}).¹

1. Montrer que le sous-groupe des translations \mathbb{T} est distingué dans \mathbb{I} .
2. Vrai ou faux: le sous-groupe \mathbb{I}_0 est distingué dans \mathbb{I} .
3. Vrai ou faux: L'ensemble des symétries orthogonales est un sous-groupe de \mathbb{I} .

Exercice 7 (Fonctions qui préservent la distance).

1. Soit p et q deux points distincts de \mathbb{C} . Montrer que Δ est une droite, où

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - p| = |z - q|\}.$$

(Il est dans le programme de sixième que cette droite est la médiatrice du segment pq !)

2. Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui préserve la distance, c'est-à-dire, $|F(z) - F(w)| = |z - w|$ et qui fixe trois points non colinéaires p_1, p_2 et p_3 . Montrer que $F(z) = z$ pour tout z . [Indication: Montrer, à l'aide de la question 1, que si $F(z) \neq z$, alors p_1, p_2 et p_3 appartiennent à la même droite.]
3. Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui préserve la distance. Montrer qu'il existe $u = T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m$ telle que $u(0) = F(0)$, $u(1) = F(1)$ et $u(i) = F(i)$. En déduire que toute F qui préserve la distance appartient au groupe \mathbb{I} .
4. Soit $\zeta = e^{2i\pi/3}$ une racine troisième de l'unité. On considère "le polygone" $P = \{1, \zeta, \zeta^2\}$. Utiliser la question 2. pour montrer que $\mathbb{I}(P)$, introduit à l'exercice 5, est isomorphe à S_3 .
5. Utiliser la question 2. pour montrer que $\mathbb{I}(\{0, 2, i\})$ est isomorphe à un sous-groupe de S_3 . Pouvez-vous déterminer son cardinal?

Exercice 8. Si G est un groupe et x, y sont des éléments de G , le commutateur $[x, y]$ est l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$.

1. Montrer que si $u, v \in \mathbb{I}$, alors $[u, v] \in \mathbb{I}^+$.
2. Montrer que si $u, v \in \mathbb{I}^+$, alors $[u, v] \in \mathbb{T}$.
3. Montrer que si $u, v \in \mathbb{T}$, alors $[u, v] = \text{id}$.

Exercice 9. Montrer que \mathbb{I}^+ est isomorphe au groupe

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : |a| = 1 \right\}.$$

¹Dans cet exercice, on admet connu le concept de sous-groupe distingué.

Exercice 10 (Un groupe triangulaire). On considère le triangle Δ de la figure 1. On note k ,

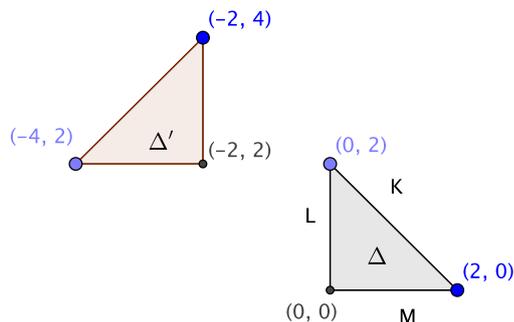


Figure 1: Deux triangles

respectivement ℓ et m , la symétrie orthogonale par rapport à la droite K , respectivement L et M . Un mot de l'alphabet $\{k, \ell, m\}$ est une isométrie ayant la forme

$$u_1 \circ \cdots \circ u_N,$$

telle que

- l'isométrie u_i appartient à $\{k, \ell, m\}$,
- N est un entier strictement positif arbitraire, et
- si $1 \leq i \leq N$, alors $u_i \neq u_{i+1}$.

1. Montrer que l'ensemble $\{\text{mots}\} \cup \{\text{identité}\}$ est un sous-groupe de \mathbb{I} .
2. Montrer que pour chaque $u \in \mathbb{I}$ et chaque droite D , on a $u \circ \Sigma \circ u^{-1} = \Sigma_{u(D)}$.
3. Trouver le mot u qui satisfait $u(\Delta) = \Delta'$.
4. Pour chaque mot u , on peint le triangle $u(\Delta)$ en blanc si u est directe, et en noir si u est indirecte. Équisser le mosaïque obtenu.

Sous-groupes finis de \mathbb{I}

Exercice 11. 1. Soit $n > 1$ un entier et R la rotation centrée à l'origine et d'angle $2\pi/n$. Montrer que $C_n = \{\text{id}, R, \dots, R^{n-1}\}$ est un sous-groupe de \mathbb{I}_0^+ .

2. Soit G un sous-groupe fini du groupe des rotations \mathbb{I}_0^+ de \mathbb{C} . Montrer que si $n = |G|$, alors $G = C_n$. (Indication: Étudier le sous-groupe de G engendré par "la plus petite rotation".)

3. Soit $n \geq 1$ un entier, R la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'origine. Montrer que

$$D_{2n} = \{\text{id}, \dots, R^{n-1}\} \cup \{\Sigma, R\Sigma, \dots, R^{n-1}\Sigma\}$$

est un sous-groupe de \mathbb{I}_0 .

4. Soit G un sous-groupe fini de \mathbb{I}_0 . Montrer que $G \cap \mathbb{I}_0^+ = C_n$ pour un certain n . En déduire que soit $G = C_n$, soit G est *isomorphe* à D_{2n} .

(Indication pour le cas $G \not\subset \mathbb{I}_0^+$: supposer d'abord que $\Sigma \in G$.)

5. Pouvez-vous exhiber un sous-groupe G de \mathbb{I}_0 différent de, mais isomorphe à D_8 ?

Exercice 12. Soit $G \subset \mathbb{I}$ un sous-groupe fini du groupe des isométries de \mathbb{C} . Soit

$$X = \{g(p) : g \in G\}.$$

l'orbite d'un point $p \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que X est fini et stable par G .

2. Soit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Montrer que le barycentre

$$c = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$$

est fixé par G .

3. Montrer que G est soit isomorphe à C_n , soit isomorphe à D_{2n} .