

TD n° 4 - Solutions

Exercice 6. (Sous-groupes standards de $\mathbb{I}$)¹

1. Rappelons qu'un sous-groupe H d'un groupe G est dit distingué si pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$. (C'est en fait la condition pour que l'ensemble quotient de G par H puisse être muni d'une structure de groupe.)

Soit $\mathbb{T}$ le sous-groupe des translations dans $\mathbb{I}$. Soit alors $u : z \mapsto a\Sigma^\epsilon(z) + b$ une isométrie du plan complexe ($a \in \mathbb{U}$, $b \in \mathbb{C}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$). Nous allons montrer que pour toute translation du plan $t \in \mathbb{T}$, $u \circ t \circ u^{-1}$ est aussi une translation. On écrit $t : z \mapsto z + c$ où $c \in \mathbb{C}$ et un petit calcul montre que : $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u \circ t \circ u^{-1}(z) &= u(u^{-1}(z) + c) = a\Sigma^\epsilon[u^{-1}(z) + c] + b \\ &= [a\Sigma^\epsilon(u^{-1}(z)) + b] + a\Sigma^\epsilon(c) \\ &= u \circ u^{-1}(z) + a\Sigma^\epsilon(c) = z + a\Sigma^\epsilon(c). \end{aligned}$$

Écrit comme ça il est donc clair que $u \circ t \circ u^{-1}$ est une translation de vecteur $a\Sigma^\epsilon(c)$.

2. Faux. Soient en effet $t : z \mapsto z + 1$ et $u : z \mapsto -z \in \mathbb{I}_0$.
Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $tut^{-1}(z) = tu(z - 1) = -z + 2 \notin \mathbb{I}_0$.
En fait, de façon générale on a $v\mathbb{I}_0v^{-1} = \mathbb{I}_{v(0)}$ pour tout $v \in \mathbb{I}$ (le vérifier !).
3. Faux : L'ensemble des symétries orthogonales (géométriquement : réflexions par rapport à une droite du plan complexe) ne contient pas l'identité.

Exercice 7. (Fonctions qui préservent la distance)

1. Soit p et q deux points distincts de $\mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $|z - p|^2 = (z - p)(\bar{z} - \bar{p}) = z\bar{z} - z\bar{p} - p\bar{z} + p\bar{p}$.
Donc on a

$$\begin{aligned} |z - p| = |z - q| &\Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{p} - p\bar{z} + p\bar{p} = z\bar{z} - z\bar{q} - q\bar{z} + q\bar{q} \\ &\Leftrightarrow z(\bar{p} - \bar{q}) + (p - q)\bar{z} = p\bar{p} - q\bar{q} \\ &\Leftrightarrow \Re(z(\bar{p} - \bar{q})) = |p|^2 - |q|^2 \end{aligned}$$

C'est bien l'équation d'une droite dans le plan complexe.

2. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $F(z_0) \neq z_0$. Alors, pour tout $i = 1, 2, 3$, on a $|p_i - F(z_0)| = |F(p_i) - F(z_0)| = |p_i - z_0|$ (où l'on a utilisé que F conservait les longueurs et que les p_i étaient des points fixes de F). Comme $F(z_0) \neq z_0$, ceci signifie que les p_i sont sur une même droite d'après la question précédente.
3. Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui préserve la distance.

On cherche $a \in \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $u = T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m$ envoie 0 sur $F(0)$, 1 sur $F(1)$ et i sur $F(i)$.

On a $T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m(0) = T_a(0) = a$ donc on pose $a = F(0)$.

¹Dans cet exercice, on admet connu le concept de sous-groupe distingué.

De même on a $T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m(1) = T_a \circ R_\theta(1)$ et donc $u(1) = F(1)$ si et seulement si $R_\theta(1) = T_{-a}(F(1)) = F(1) - F(0)$. Comme par hypothèse F préserve les distances on en déduit que $|F(1) - F(0)| = |1 - 0| = 1$ donc il existe bien un angle $\theta \in \mathbb{R}$ (unique) tel que $R_\theta(1) = F(1) - F(0)$.

Finalement il reste à déterminer $m \in \mathbb{Z}$ pour que $u(i) = F(i)$. Soit $v := R_{-\theta} \circ T_{-a} \circ F$. On sait que la fonction v laisse fixe 0 et 1 et préserve les longueurs, ainsi $|v(i)| = 1$ et $|v(i) - 1| = |i - 1| = \sqrt{2}$. $v(i)$ est donc l'un des deux points (i et $-i$) d'intersection du cercle unité avec le cercle de centre 1 et de rayon $\sqrt{2}$. Si $v(i) = i$ on pose alors $m = 0$, sinon on pose $m = 1$. On a bien alors $\Sigma^m \circ v(i) = i$ (et de même pour 0 et 1), c'est-à-dire $u^{-1} \circ F(i) = i$ (et de même pour 0 et 1).

Pour conclure il reste à appliquer la question précédente à $u^{-1} \circ F$ qui est donc une fonction préservant la distance (cette propriété de conserver la distance est stable par composition des fonctions) et qui admet trois points fixes non alignés, à savoir 0, 1 et i . Donc $u^{-1} \circ F = Id$ et donc par composition à gauche par u :

$$F = u \circ (u^{-1} \circ F) = u \circ Id = u \in \mathbb{I}.$$

4. Soit $\zeta = e^{2i\pi/3}$ une racine troisième de l'unité. On considère "le polygone" $P = \{1, \zeta, \zeta^2\}$.

On commence par définir le morphisme $\phi : \mathbb{I}(P) \rightarrow S_3$ qui à une symétrie laissant stable le triangle P associe la permutation de $\{1, 2, 3\}$ associée (où l'on identifie P à $\{1, 2, 3\}$).

D'après la question précédente, ϕ est bien injectif. En effet si la permutation associée à une symétrie s est l'identité c'est que s admet 1, ζ et ζ^2 comme points fixes et c'est donc l'identité du plan complexe d'après ce qui précède. ϕ est donc injectif.

ϕ est sinon surjectif car toute permutation de P peut être prolongée en une symétrie du plan. Par exemple : (12) (resp. (23), (13)) est l'image de la symétrie orthogonale $s_{\pi/3}$ (resp. $s_0, s_{2\pi/3}$) d'axe $D_{\pi/3}$ (resp. D_0) où

$$D_\theta := \{z \in \mathbb{C} | \text{Arg}(z) = \theta\}$$

est la droite formant un angle $\theta \in \mathbb{R}$ avec l'axe des abscisses.

De même pour les 3-cycles : (123) est l'image de la rotation $R_{\pi/3}$ et (132) de $R_{2\pi/3}$.

ϕ est donc bien un isomorphisme.

5. Comme à la question précédente on définit un morphisme $\psi : \mathbb{I}(\{0, 2, i\}) \rightarrow S_3$ en identifiant $\{0, 2, i\}$ à $\{1, 2, 3\}$. L'injectivité provient toujours de la question 2 et donc on en déduit que $\mathbb{I}(\{0, 2, i\})$ est isomorphe à un sous-groupe de S_3 . Par contre, il n'est plus possible de montrer la surjectivité de ce morphisme. En effet, une transposition de S_3 devrait être l'image d'une réflexion (= symétrie orthogonale) mais il n'existe aucune réflexion préservant $\{0, 2, i\}$! Ainsi l'image de ψ ne contient aucune transposition. Le seul sous-groupe de S_3 ne contenant aucune transposition est le sous-groupe (d'ordre 3) engendré par les 3-cycles. Existe-t-il donc un 3-cycle dans l'image de ψ ?

En réalité non car on peut montrer directement que $\mathbb{I}(\{0, 2, i\})$ est réduit à l'identité. En effet toute isométrie F qui préserve $\{0, 2, i\}$ doit envoyer le couple de points $(0, i)$ sur un couple de points $(F(0), F(i))$ de $\{0, 2, i\}$ tel que $|F(i) - F(0)| = |i - 0| = 1$ donc $\{F(0), F(i)\} = \{0, i\}$. Aussi a-t-on donc $F(2) = 2$ mais comme $|F(2) - F(0)| = |2 - 0| = 2 \neq |2 - i|$ on a nécessairement $F(0) = 0$ et donc finalement $F(i) = i$. En d'autres termes $\mathbb{I}(\{0, 2, i\}) = \{Id\}$ est le groupe trivial. (Ceci vient au fond du fait que le triangle $\{0, 2, i\}$ n'a aucune symétrie !)

Exercice 8. Si G est un groupe et x, y sont des éléments de G , le commutateur $[x, y]$ est l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$.

1. **Ou bien on calcule :** utiliser l'exercice 1.

Ou bien on remarque qu'on a un morphisme de groupes

$$\epsilon : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ; u = \{z \mapsto a\Sigma^m(z) + b\} \mapsto m \pmod{2}$$

dont le noyau est $\mathbb{I}^+$.

Du coup comme $\epsilon([u, v]) = [\epsilon(u), \epsilon(v)] = 0$ (car ϵ est un morphisme de groupes et que le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est commutatif) on en déduit que, pour tous $u, v \in \mathbb{I}$, $[u, v] \in \mathbb{I}^+$.

2. **Ou bien on calcule :** Soient $u, v \in \mathbb{I}^+$ que l'on écrit sous la forme $u = T_a \circ R_\theta$ et $v = T_b \circ R_\varphi$. Alors

$$\begin{aligned} [u, v] &= T_a R_\theta T_b R_\varphi R_{-\theta} T_{-a} R_{-\varphi} T_{-b} \\ &= T_a T_{R_\theta(b)} R_\theta R_{\varphi-\theta} T_{-a} R_{-\varphi} T_{-b} \\ &= T_{a+R_\theta(b)} R_\varphi T_{-a} R_{-\varphi} T_{-b} \\ &= T_{a+R_\theta(b)} R_\varphi R_{-\varphi} T_{-R_{-\varphi}(a)} T_{-b} \\ &= T_{a+R_\theta(b)-R_{-\varphi}(a)-b} \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Ou bien on remarque qu'on a un morphisme de groupe

$$f : I^+ \rightarrow \mathbb{U} ; u = \{z \mapsto az + b\} \mapsto a$$

et que $f([u, v]) = [f(u), f(v)] = 1$ car $\mathbb{U}$ est un groupe commutatif. Ainsi $[u, v]$ est dans le noyau de f qui est exactement le sous-groupe des translations $\mathbb{T}$.

3. Soient $T_a, T_b \in \mathbb{T}$. Alors $[T_a, T_b] = T_a T_b T_{-a} T_{-b} = T_{a+b-a-b} = T_0 = Id$.

Exercice 9. On a clairement un **isomorphisme**

$$\phi : \left\{ \begin{array}{cc} B & \rightarrow \mathbb{I}^+ \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid |a| = 1 \right) & \mapsto \{u_{a,b} : z \mapsto az + b\} \end{array} \right.$$

Il faut juste vérifier que c'est bien un morphisme de groupe mais c'est évident car

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, u_{a,b} \circ u_{c,d}(z) = u_{a,b}(cz + d) = a(cz + d) + b = acz + (ad + b).$$

Exercice 10. (Un groupe triangulaire)

On considère le triangle Δ de la figure 1. On note k , respectivement ℓ et m , la symétrie orthogonale par rapport à la droite K , respectivement L et M .

1. L'identité est clairement dans $\{\text{mots}\} \cup \{\text{identité}\}$. Par convention d'ailleurs on va considérer que c'est le mot de longueur zéro.

Soient $h = u_1 \circ \dots \circ u_M$ et $g = v_1 \circ \dots \circ v_N$ deux mots de l'alphabet $\{k, \ell, m\}$ ($N, M \in \mathbb{N}$; on prend pour convention $h = Id$ si $N = 0$). Soit $K \leq \min M, N$ le plus petit entier positif tel que $u_{M-K} \neq v_K$. On a alors $h \circ g = u_1 \circ \dots \circ u_M \circ v_1 \circ \dots \circ v_N = u_1 \circ \dots \circ u_{M-K} \circ v_K \circ \dots \circ v_N =: w_1 \circ \dots \circ w_{N+M-2K}$ et c'est donc bien un mot car $w_i \neq w_{i+1}$ si $0 \leq i \leq N + M - 2K$. Donc l'ensemble des mots est stable par composition.

Enfin soit $h = u_1 \circ \dots \circ u_M$ un mot. Alors $h^{-1} = u_M \circ \dots \circ u_1 =: v_1 \circ \dots \circ v_M$ car pour tout i , $u_i^2 = Id$ c'est-à-dire $u_i^{-1} = u_i$. En bref, h^{-1} est encore un mot puisque $v_i = u_{M-i} \neq u_{M-i-1} = v_{i+1}$.

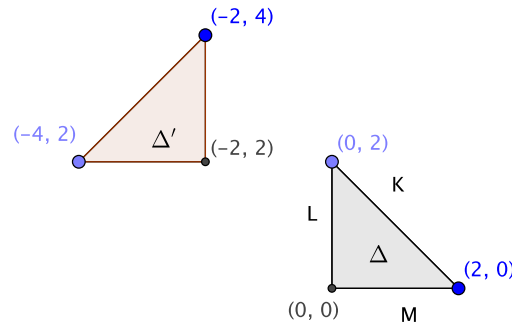


Figure 1: Deux triangles

L'ensemble des mots de l'alphabet $\{k, \ell, m\}$ est donc un sous-groupe du groupe des isométries du plan complexe $\mathbb{I}$.

2. Soient $u \in \mathbb{I}$, D une droite du plan complexe et $y \in u(D)$ un point de la droite $u(D)$. On écrit $y = u(x)$ où $x \in D$. On a alors

$$u \circ \Sigma_D \circ u^{-1}(y) = u \circ \Sigma_D \circ u^{-1}(u(x)) = u \circ \Sigma(x) = u(x) = y$$

où on a utilisé le fait que $x \in D$ était un point fixe de la symétrie orthogonale Σ_D d'axe D . Ainsi la droite $\Sigma(D)$ est un ensemble de points fixes de l'isométrie $u \circ \Sigma_D \circ u^{-1}$. D'autre part $u \circ \Sigma_D \circ u^{-1}$ n'est pas une isométrie directe car

$$\epsilon(u \circ \Sigma_D \circ u^{-1}) = \epsilon(u) \circ \epsilon(\Sigma_D) \circ \epsilon(u)^{-1} = \epsilon(\Sigma(D)) = \bar{1} \neq \bar{0}$$

où ϵ est le morphisme canonique de $\mathbb{I}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (dont le noyau est exactement le sous-groupe des isométries directes). Ainsi $u \circ \Sigma \circ u^{-1}$ est une isométrie indirecte du plan complexe dont la droite $u(D)$ est un ensemble de points fixes, c'est donc $\Sigma_{u(D)}$.

3. u doit envoyer hypothénuse sur hypothénuse. Un petit dessin montre que $u = \Sigma_L \Sigma_K \Sigma_L \Sigma_M = \ell k \ell m$ convient. C'est une isométrie directe (composée d'un nombre pair de symétries indirectes).

4. On obtient un pavage du plan par des triangles noirs et blancs dont aucun noir ne partage de côté avec un autre noir (et de même pour les blancs).

Sous-groupes finis de $\mathbb{I}$

Exercice 11. 1. Soit $n > 1$ un entier et R la rotation centrée à l'origine et d'angle $2\pi/n$. Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, R^k fixe $0 \in \mathbb{C}$ et est une isométrie directe ($R^k : z \mapsto e^{2k\pi/n}z$). Ainsi $C_n \subset \mathbb{I}_0^+$. Montrons maintenant que c'est un sous-groupe.

Par définition $Id \in C_n$.

Soient $R^i, R^j \in C_n$ où $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Comme il est clair que $R^n = Id$, notons r le reste de la division euclidienne de $i + j$ par n . On a alors $R^i \circ R^j = R^{i+j} = R^r \in C_n$.

Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $R^{-i} = R^{n-i} \in C_n$. Ainsi C_n est bien un sous-groupe de $\mathbb{I}_0^+$.

2. Soit G un sous-groupe fini du groupe des rotations $\mathbb{I}_0^+$ de $\mathbb{C}$. Soit R la rotation de G d'angle $\theta \in]0, 2\pi]$ minimal. Alors, $H := \{Id, R, R^2, \dots, R^k, \dots\} \subset G$ devant être fini, nécessairement il existe $i < j \in \mathbb{N}$ tels que $R^i = R^j$ donc il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $R^r = Id$. Prenant ce r minimal on en déduit que $H = \{Id, R, R^2, \dots, R^k, \dots\} = C_r$ et que $\theta = \frac{2\pi}{r}$ (ceci provient de la minimalité de θ). De plus, on a alors $C_r = H \subset G$.

Montrons qu'en raison de la minimalité de R , on a nécessairement $G \subset H = C_r$. Soit donc $g \in G$. G étant de cardinal fini n , il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ (que l'on prend minimal) tel que $g^m = Id$. g est alors une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{m}$ où k et m sont premiers entre eux. Grace au théorème de Bézout, il

existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tels que $uk + vm = 1$. Ainsi, $g^u \in G$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{m}$ et si $g^u \in H$ alors $g = (g^u)^k \in H$. Il suffit donc de montrer que $g^u \in H$ et on va donc plutôt supposer $k = 1$ et montrer que $g \in H$.

Montrons qu'en fait m divise r et donc que (si l'on écrit $r = sm$ avec $s \in \mathbb{N}$) $g = R^s \in H$. Supposons donc par l'absurde que ça ne soit pas le cas et donc que $d := \text{pgcd}(m, r)$ divise strictement m . On note alors $m_1 := m/d > 1$. En appliquant le théorème de Bézout à m et r , on trouve $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $am + br = d$. On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$g^b \circ R^a(z) = e^{2ib\pi/m} e^{2ia\pi/r} z = e^{2id\pi/mr} z = e^{2id\pi/mr} z = e^{2i\pi/m_1 r} z.$$

Comme $m_1 > 1$ on a donc construit une rotation $g^b \circ R^a$ dans G d'angle strictement plus petit que celui de R ce qui contredit la minimalité de R . Ainsi m divise r et donc $g \in H$.

Au total, on a donc montré que $G = H = C_r$. Nécessairement aussi $r = |C_r| = |G| = n$, d'où le résultat : $G = C_n$ où $n = |G|$.

3. Soit $n \geq 1$ un entier, R la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'origine. Soit

$$D_{2n} = \{\text{id}, \dots, R^{n-1}\} \cup \{\Sigma, R\Sigma, \dots, R^{n-1}\Sigma\}.$$

Tous les éléments de D_{2n} laissent fixe 0 donc $D_{2n} \subset \mathbb{I}_0$: montrons que c'en est un sous-groupe.

Par construction, $\text{Id} \in D_{2n}$.

Soit ensuite $R^k \Sigma^\epsilon \in D_{2n}$ où $0 \leq k \leq n-1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$. On a alors

$$(R^k \Sigma^\epsilon)^{-1} = \Sigma^\epsilon R^{-k} = \Sigma^\epsilon R^{-k} = R^k \Sigma^\epsilon \in D_{2n}$$

où nous avons fait usage des calculs de l'exercice 1 dans la dernière égalité.

Soient enfin $R^{k_1} \Sigma^{\epsilon_1}, R^{k_2} \Sigma^{\epsilon_2} \in D_{2n}$ avec $0 \leq k_1, k_2 \leq n-1$ et $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$. Alors

$$R^{k_1} \Sigma^{\epsilon_1} R^{k_2} \Sigma^{\epsilon_2} = R^{k_1} R^{-k_2} \Sigma^{\epsilon_1} \Sigma^{\epsilon_2} = R^{k_1 - k_2} \Sigma^{\epsilon_1 + \epsilon_2} = R^r \Sigma^\epsilon \in D_{2n}$$

où $r = k_1 - k_2 + n$ si $k_1 - k_2 < 0$ et $r = k_1 - k_2$ sinon, et où $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \pmod{2} \in \{0, 1\}$ (là encore on utilise l'exercice 1 dans la deuxième égalité).

Donc D_{2n} est un sous-groupe de $\mathbb{I}_0$.

4. *Une remarque préliminaire sur nos notations* : Lorsque H est un sous-ensemble de $\mathbb{I}_0$, on définit $H\Sigma$ comme étant l'ensemble $\{h \circ \Sigma \mid h \in H\}$.

Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{I}_0$.

L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe donc $G \cap \mathbb{I}_0^+$ est un sous-groupe de $\mathbb{I}_0^+$. Ainsi d'après la question 2, $G \cap \mathbb{I}_0^+ = C_n$ où $n = |G \cap \mathbb{I}_0^+|$.

Le cas le plus simple est donc quand $G \subset \mathbb{I}_0^+$ car on a alors $G = C_n$ avec $n = |G|$.

Supposons donc désormais que $G \not\subset \mathbb{I}_0^+$ et soit $n := |G \cap \mathbb{I}_0^+|$ de façon à ce que $G \cap \mathbb{I}_0^+ = C_n$ d'après la question 1.

Lorsque $\Sigma \in G$ il est alors évident que $D_{2n} := C_n \cup (C_n \Sigma) \subset G$ puisque $C_n = G \cap \mathbb{I}_0^+ \subset G$. Montrons donc l'inverse. En fait, il faut remarquer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{I}_0 & \rightarrow \mathbb{I}_0 \\ g & \mapsto g \circ \Sigma \end{cases}$$

induit une bijection de $\mathbb{I}_0$ avec $\mathbb{I}_0$ et envoie $\mathbb{I}_0^+$ sur $\mathbb{I}_0 \setminus \mathbb{I}_0^+$. Comme par hypothèse $\Sigma \in G$, on en déduit aussi que φ préserve G et induit par restriction une bijection entre $G \cap \mathbb{I}_0^+$ et $[G \cap \mathbb{I}_0^+] \Sigma = [G \cap (\mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_0^+)]$ (et réciproquement).

Ainsi

$$G \cap (\mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_0^+) = (G \cap \mathbb{I}_0^+) \Sigma = C_n \Sigma.$$

Donc il est clair que

$$G = [G \cap \mathbb{I}_0^+] \sqcup [G \cap (\mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_0^+)] = C_n \sqcup C_n \Sigma = D_{2n}.$$

Il reste donc à montrer le résultat lorsque $\Sigma \notin G$. Dans ce cas soit $\Sigma' \in G \setminus (G \cap \mathbb{I}_0^+)$ quelconque. C'est donc une symétrie axiale d'axe une droite vectorielle Δ . Soit θ l'angle que forme cette droite avec l'axe des abscisses du plan complexe. Le groupe $R_{-\theta}GR_\theta$ (vérifier que c'est bien un groupe) contient alors Σ car $R_{-\theta}\Sigma'R_\theta = \Sigma$ (Cf. l'exercice 1) et on peut lui appliquer ce qu'on a fait précédemment. Il existe donc R tel que si l'on pose $n = |R_{-\theta}GR_\theta| = |G|$ alors :

$$R_{-\theta}GR_\theta = D_{2n} = C_n \sqcup (C_n\Sigma).$$

On en déduit que :

$$G = R_\theta D_{2n} R_{-\theta} = [R_\theta C_n R_{-\theta}] \sqcup [R_\theta (C_n \Sigma) R_{-\theta}] = C_n \sqcup [C_n (R_\theta \Sigma R_{-\theta})] = C_n \sqcup [C_n \Sigma'].$$

où l'on a utilisé que $R_\theta C_n R_{-\theta} = C_n$ (les rotations de même centre commutent) et à nouveau que d'après l'exercice 1 $R_\theta (C_n \Sigma) R_{-\theta} = C_n (R_\theta \Sigma R_{-\theta}) = C_n (R_{2\theta} \Sigma)$.

Or $R_\theta D_{2n} R_{-\theta}$ est bien isomorphe à D_{2n} , d'où le résultat.

5. Soit C le carré de sommets $1, i, -1$ et $-i$. Alors, pour tout $\theta \neq 0, \pi/4$, $C_\theta := e^{i\theta}C$ est encore un carré mais Σ ne préserve pas C_θ . Alors $\mathbb{I}_0(C)$ est bien isomorphe à D_8 d'après ce qui précède mais comme il ne contient pas Σ il est différent de et donc seulement isomorphe à D_8 .

Exercice 12. Soit $G \subset \mathbb{I}$ un sous-groupe fini du groupe des isométries de $\mathbb{C}$. Soit

$$X = \{g(p) : g \in G\}.$$

l'orbite d'un point $p \in \mathbb{C}$.

1. X est un ensemble indexé par G un ensemble fini donc X est fini. Il est clairement stable par G . En effet, soient $h \in G$ et $x \in X$. On écrit alors $x = g(p)$ pour $g \in G$. Comme G est un groupe on a $hg \in G$ donc $h(x) = hg(p) \in X$. Donc X est stable par G , c'est-à-dire $\forall h \in G, h(X) \subset X$.
fini et stable par G .

2. On écrit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ et soit c l'isobarycentre des points de X :

$$c = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$$

Soit également g un élément de G . En réalité, g permute les éléments de X . Soit en effet un entier i avec $1 \leq i \leq m$. Alors $g(x_i) \in X$ donc il existe j , $1 \leq j \leq m$ tel que $g(x_i) = x_j$. Soit alors σ_g la fonction $i \mapsto j$.

Montrons que σ_g est injective (donc bijective par cardinalité). Si $\sigma_g(i) = \sigma_g(j)$ alors $g(x_i) = x_{\sigma_g(i)} = x_{\sigma_g(j)} = g(x_j)$ et alors par injectivité de g on a $x_i = x_j$ donc $i = j$. Ainsi, σ_g est bien injective et donc c'est une permutation de $\{1, \dots, m\}$.

On a donc que :

$$c = \frac{x_{\sigma_g(1)} + \dots + x_{\sigma_g(m)}}{m} = \frac{g(x_1) + \dots + g(x_m)}{m}.$$

Par ailleurs, si nous écrivons $g : z \mapsto a\Sigma^m z + b$ c'est-à-dire $g = t_b \circ f$ où $f : z \mapsto a\Sigma^m z$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} c &= \frac{g(x_1) + \dots + g(x_m)}{m} = \frac{(f(x_1) + b) + \dots + (f(x_m) + b)}{m} = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m) + mb}{m} \\ &= \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m)}{m} + b = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) + b = g(c). \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait qu'une isométrie fixant zéro (de la forme $z \mapsto a\Sigma^m(z)$) était $\mathbb{R}$ -linéaire (**Attention** : une isométrie indirecte fixant zéro n'est par contre pas $\mathbb{C}$ -linéaire ; penser à la conjugaison complexe, elle est anti-linéaire).

3. Soit $G' = T_{-c}GT_c := \{T_{-c} \circ g \circ T_c | g \in G\}$. G' est clairement un groupe et pour tout $g \in G$, $T_{-c} \circ g \circ T_c(0) = T_{-c} \circ g(c) = T_{-c}(c) = 0$. Ainsi $G' \subset \mathbb{I}_0$. On peut donc lui appliquer la dernière question de l'exercice précédent pour obtenir que G' est isomorphe à D_{2n} ou à D_n où $n = |G'|$. Mais comme G' est isomorphe à G et qu'ils sont tous les deux de même cardinal, on en déduit le même résultat pour G .

Il est possible d'aller plus loin en remarquant que $G \subset \mathbb{I}(X)$ pour tout ensemble X tel que ci-dessus ($\mathbb{I}(X)$ est défini comme dans l'exercice 5). Or lorsque X est un polygone régulier à n sommets $\mathbb{I}(X)$ est le groupe diédral D_{2n} .

Choisissons un point $p \in \mathbb{C}$ tel que X soit de cardinal minimal parmi toutes les orbites possibles de G (en effet X s'appelle *l'orbite du point p sous l'action du groupe G*). Nous allons montrer que ce X forme en fait un polygone régulier.

Montrons tout d'abord que les points de X sont tous situés sur un cercle. En effet, d'après la question précédente le groupe G est constitué d'éléments ayant tous (au moins) un point fixe en commun, le barycentre c de X . D'autre part, comme tout élément $g \in G$ préserve les distances on a $|g(p) - g(c)| = |p - c|$. En d'autres termes tous les points de X sont sur le cercle de centre c et de rayon $|p - c|$. Le fait que G soit isomorphe à D_{2n} ou bien à D_n implique donc que X forme un polygone régulier.