TD n° 2

Exercice 1. Montrer que le groupe S_n est non abélien quel que soit $n \geq 3$.

Exercice 2. Soient $2 \leq k \leq n$ deux entiers. Combien S_n possède-t-il de k-cycles ?

Exercice 3. Soient $2 \leq k \leq n$ deux entiers, et $c = (a_1 \dots a_k) \in S_n$ un k-cycle.

1. Donner l'inverse c^{-1} de c.
2. Quel est le plus petit entier $\ell \geq 1$ tel que $c^\ell = \mathrm{Id}$?
3. Montrer que c peut s'écrire comme produit de $k-1$ transpositions, et en déduire sa signature $\varepsilon(c)$.
4. Montrer que toute permutation de S_n peut s'écrire comme produit de transpositions. Cette décomposition est-elle toujours unique ?

Exercice 4.

1. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations suivantes :

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 6 & 8 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. En déduire la signature de chacune d'elles.
3. Calculer a^{10}, b^{11}, c^{12} et d^{13}.
4. Donner le nombre d'inversions de a, b, c et d.

Exercice 5.

1. Calculer la signature de chacune des deux permutations suivantes :

$$\begin{aligned} e &= (1\ 8\ 3)(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 6)(7\ 6\ 8\ 4)(5\ 7\ 2) \\ f &= (1\ 8\ 2\ 5)(1\ 4)(3\ 2\ 7\ 6\ 8)(2\ 3\ 8)(4\ 5) \end{aligned}$$

2. Décomposer e et f en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 6. Soient $2 \leq k \leq n$ deux entiers, et $(a_1 \dots a_k) \in S_n$ un k-cycle.

1. Montrer que, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a

$$\sigma(a_1 a_2 \dots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2) \dots \sigma(a_k)).$$

2. En déduire que si deux cycles $c_1, c_2 \in S_n$ sont de même longueur, alors il existe $\sigma \in S_n$ tel que $c_2 = \sigma c_1 \sigma^{-1}$. Que peut-on dire de deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ dont les décompositions en produit de cycles à supports disjoints comportent un même nombre de cycles de chaque longueur ?
3. Pour $\sigma_1 = (2\ 4)(3\ 8)(7\ 6\ 5)$ et $\sigma_2 = (6\ 2)(1\ 3)(4\ 8\ 7)$, trouver un élément $\sigma \in S_8$ tel que l'on ait $\sigma_2 = \sigma\sigma_1\sigma^{-1}$.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrer que tout élément de S_n peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$.
2. Montrer que tout élément de S_n peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$.
3. Montrer que tout élément de S_n peut s'écrire comme produit d'éléments de la forme $(1\ 2)$ ou $(1\ 2 \dots n)$.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose

$$Z(S_n) = \{\sigma \in S_n : \forall x \in S_n,\ \sigma x = x\sigma\}.$$

Montrer que $Z(S_n) = \{\mathrm{Id}\}$ pour $n \geq 3$. Que se passe-t-il pour $n = 1$ et $n = 2$?

Exercice 9.

1. Soit g un élément d'un groupe G. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi_g : G & \to & G \\ x & \mapsto & gx \end{array}$$

   est bien définie, et qu'elle est bijective. Quelle est sa bijection réciproque ?
2. Soient $n \geq 2$ un entier et $\tau \in S_n$ une transposition. Montrer que $\varphi_\tau^2 = \mathrm{Id}$. Que dire de la décomposition de φ_τ en produit de cycles à supports disjoints ?
3. Montrer que, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a

$$\varepsilon(\varphi_\tau(\sigma)) = -\varepsilon(\sigma).$$

4. On pose $A_n = \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} \subseteq S_n$. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$|A_n| = \frac{n!}{2}.$$

Exercice 10. On considère $n \geq 2$ points $P_1, \dots, P_n$ du plan $\mathbb{R}^2$, muni d'une distance d. On suppose que les distances $d(P_i, P_j)$, où $i \neq j$, sont deux à deux distinctes. En chaque point P_i se trouve un étudiant du groupe de TD, muni d'un ballon rempli d'eau qu'il lancera, dès le signal donné, sur l'étudiant le plus proche de lui. Montrer que si n est impair, alors au moins l'un des étudiants restera sec. Ce résultat est-il encore vrai lorsque n est pair ?