

TD n° 2 - Solutions

Exercice 6. Soient $2 \leq k \leq n$ deux entiers, et $c = (a_1 \dots a_k) \in S_n$ un k -cycle.

1. Soit $y \in \{1, \dots, n\}$ que l'on écrit sous la forme $\sigma(x)$ pour $x \in \{1, \dots, n\}$ (ceci est possible car σ est une bijection). On alors

$$\begin{aligned} \sigma(a_1 a_2 \dots a_k) \sigma^{-1}(y) &= \sigma(a_1 a_2 \dots a_k) \sigma^{-1} \sigma(x) = \sigma(a_1 a_2 \dots a_k)(x) \\ &= \begin{cases} \sigma(a_{i+1}) & \text{si } x = a_i \\ \sigma(x) & \text{si } x \notin \text{Supp}(c) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma(a_{i+1}) & \text{si } y = \sigma(a_i) \\ y & \text{si } y \notin \text{Supp}((\sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))) \end{cases} \\ &= (\sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))(y). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Soient deux cycles $c_1, c_2 \in S_n$ sont de même longueur :

$$c_1 = (a_1, a_2, \dots, a_k) ; c_2 = (b_1, b_2, \dots, b_k).$$

Il existe alors toujours une permutation $\sigma \in S_n$ qui envoie a_i sur b_i et qui envoie le support de c_1 sur le support de c_2 car ces deux supports ont même cardinal.

Pour cette permutation $\sigma \in S_n$ on a bien d'après le calcul précédent $c_2 = \sigma c_1 \sigma^{-1}$.

De façon plus générale : lorsqu'on a deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ dont les décompositions en produit de cycles à supports disjoints comportent un même nombre de cycles de chaque longueur on peut trouver $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma_2 = \sigma \sigma_1 \sigma^{-1}$.

En effet on écrit les décompositions en cycles à supports disjoints de σ_1 et σ_2 :

$$\sigma_1 = c_1 c_2 \dots c_r \text{ et } \sigma_2 = d_1 d_2 \dots d_r,$$

où pour chaque $i \leq r$, c_i et d_i sont des cycles de même longueur. On note également $\{a_1, \dots, a_k\}$ (*resp.* $\{b_1, \dots, b_k\}$) l'ensemble des points fixes de σ_1 (*resp.* σ_2).

D'après la question précédente, on sait que pour chaque $i \leq r$, il existe $\tau_i \in S_n$ tel que $d_i = \tau_i c_i \tau_i^{-1}$. On définit alors la permutation $\sigma \in S_n$ de la façon suivante :

$$\sigma(x) = \begin{cases} \tau_i(x) & \text{si } x \in \text{Supp}(c_i) \\ b_j & \text{si } x = a_j \end{cases}$$

Cette permutation est bien définie car les $\text{Supp}(c_i)$ et $\{a_1, \dots, a_k\}$ sont deux à deux disjoints et on a $\sigma c_i \sigma^{-1} = d_i$ car σ coïncide avec τ_i sur le support de c_i .

On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma \sigma_1 \sigma^{-1} &= \sigma c_1 c_2 \dots c_r \sigma^{-1} \\ &= (\sigma c_1 \sigma^{-1})(\sigma c_2 \sigma^{-1}) \dots (\sigma c_r \sigma^{-1}) \\ &= d_1 d_2 \dots d_r. \end{aligned}$$

D'où le résultat général annoncé.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Tout élément de S_n s'écrit comme produit de transpositions (ij) . Or $(ij) = (1i)(1j)(1i)$ donc toute permutation s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$.
2. Pour tout $i < j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$(ij) = (i+1\ i) \dots (j-1\ j-2)(j-1\ j) \dots (i+1\ i+2)(i\ i+1).$$

Ainsi toute permutation s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$.

3. D'après l'exercice 6 question 1, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$(i\ i+1) = (1\ 2 \dots n)^i (1\ 2) (1\ 2 \dots n)^{-i} = (1\ 2 \dots n)^i (12) (1\ 2 \dots n)^{n-i}.$$

On en déduit (en utilisant la question précédente) que tout élément de S_n peut s'écrire comme produit d'éléments de la forme $(1\ 2)$ ou $(1\ 2 \dots n)$.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier.

$$Z(S_n) = \{\sigma \in S_n : \forall x \in S_n, \sigma x = x\sigma\} = \{\sigma \in S_n : \forall x \in S_n, x^{-1}\sigma x = \sigma\}.$$

Exercice 9.

1. Soit g un élément d'un groupe G et soit alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$$

L'application φ_g est bien définie puisque $gx \in G$ pour tout $x \in G$.

Elle est de plus bijective puisque pour tout $x \in G$, $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(x) = \varphi_{g^{-1}}(gx) = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = x$ (par associativité du produit de G), c'est-à-dire $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = Id$. Comme cette formule est vraie pour tout $g \in G$ donc en particulier pour g^{-1} . On en déduit que $\varphi_{g^{-1}}$ est la réciproque de φ_g et donc que φ_g est bijective.

2. Soient $n \geq 2$ un entier et $\tau \in S_n$ une transposition. Soit $x \in G$. Alors on a par associativité du produit de G et parce que $\tau^2 = Id$:

$$\varphi_\tau^2(x) = \varphi_\tau(\tau x) = \tau(\tau x) = (\tau\tau)x = x.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in G$, on en déduit que $\varphi_\tau^2 = Id$.

$\varphi_\tau \in \text{Bij}(G, G) = S_{|G|}$ avec $n = |G|$, donc ça a bien un sens de parler de la décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

L'application φ_τ coïncide avec la transposition τ sur l'ensemble G , donc il s'agit d'une transposition qui est déjà sa propre décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

3. Soit $\sigma \in S_n$. Comme la signature est un morphisme de groupe, on a

$$\varepsilon(\varphi_\tau(\sigma)) = \varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma) = (-1)\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\sigma).$$

4. On pose $A_n = \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} \subseteq S_n$.

φ_τ envoie A_n sur $S_n \setminus A_n = \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} \subseteq S_n$. Or, comme φ_τ est un isomorphisme, ces deux ensembles sont en bijection et ont donc nécessairement même cardinal. Comme ils forment de plus une partition de S_n :

$$S_n = A_n \sqcup (S_n \setminus A_n),$$

on en déduit que

$$n! = |S_n| = |A_n| + |S_n \setminus A_n| = |A_n| + |A_n| = 2|A_n|.$$

Il en découle le résultat attendu :

$$|A_n| = \frac{n!}{2}.$$

Exercice 10. Soit E l'ensemble des étudiants du groupe de TD. Comme les distances $d(P_i, P_j)$, où $i \neq j$, sont deux à deux distinctes, l'application suivante $\varphi : E \rightarrow E$ est bien définie :

$$P_i \mapsto P_j \text{ tel que } d(P_i, P_j) \text{ est minimale.}$$

Maintenant on peut reformuler notre problème : tous les étudiants sont mouillés *si et seulement si* φ est surjective.

Remarquons également que φ est sans point fixe c'est-à-dire qu'aucun étudiant ne se lance son ballon sur lui-même.

Supposons désormais par l'absurde que $n := |E|$ est impair et que φ est surjective. Par cardinalité, φ est alors également bijective, c'est donc une permutation de l'ensemble des étudiants E . Considérons alors sa décomposition en cycles à supports disjoints $\varphi = c_1 \dots c_r$ ($r \in \mathbb{N}$). Comme φ n'a aucun point fixe comme nous l'avons relevé plus haut, c'est que les supports des cycles c_i forment une partition de E . Ainsi a-t-on :

$$|E| = |Supp(c_1)| + \dots + |Supp(c_r)|.$$

Comme par hypothèse $|E|$ est impair c'est que l'un des c_i , $1 \leq i \leq r$, est de support de cardinal impair (donc ≤ 3). Quitte à se restreindre à l'ensemble des étudiants du support de cette permutation, on peut donc se ramener au cas où φ est une permutation circulaire. La question est alors : peut-il exister une file de plus de 3 étudiants tel que le suivant est toujours plus proche de celui qui le suit que de celui qui le précède ? Si tel était le cas on aurait une suite de points $P_1, \dots, P_{2k+1} \in \mathbb{R}^2$ ($k \geq 1$) tels que $d(P_1, P_2) > d(P_2, P_3) > \dots > d(P_{2k}, P_{2k+1}) > d(P_{2k+1}, P_1)$. Ce qui est absurde puisque P_2 est censé être l'étudiant le plus proche de P_1 et ces inégalités au contraire donnent P_{2k+1} strictement plus proche de P_1 que P_2 : $d(P_1, P_2) > d(P_1, P_{2k+1})$.

Donc il existe nécessairement un étudiant qui reste sec.

En fait ce qui est essentiel dans la démonstration est que φ admette un cycle de longueur ≤ 3 dans sa décomposition en supports disjoints. Lorsque n est pair il est imaginable de répartir les étudiants en paires de façon à ce que dans chaque paire, chaque membre lance son ballon sur l'autre étudiant avec lequel il est apparié. Ce cas correspond à la situation où φ est un produit de transpositions à supports disjoints.