## Feuille d'exercices n° 1

### Ensembles et applications

**1** — Soient $A, B, C$ des ensembles. Montrer les égalités suivantes.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad ; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**2** — Soient $E$ un ensemble et $A, B, C$ trois parties de $E$ telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

**3** — Soit $E$ et $F$ deux ensembles de cardinaux supérieurs à 2 et $f : E \to F$. Les affirmations suivantes sont-elle vraies ou fausses ? Justifier.

1) $\forall\, x \in E \quad \forall\, y \in F \quad f(x) = y$.

2) $\forall\, x \in E \quad \exists\, y \in F$ tel que $\quad f(x) = y$.

3) $\exists\, x \in E$ tel que $\quad \forall\, y \in F \quad f(x) = y$.

4) $\exists\, x \in E$ tel que $\quad \exists\, y \in F$ tel que $\quad f(x) = y$.

5) $\forall\, y \in F \quad \forall\, x \in E \quad f(x) = y$.

6) $\forall\, y \in F \quad \exists\, x \in E$ tel que $\quad f(x) = y$.

7) $\exists\, y \in F$ tel que $\quad \forall\, x \in E \quad f(x) = y$.

8) $\exists\, y \in F$ tel que $\quad \exists\, x \in E$ tel que $\quad f(x) = y$.

**4** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et une application $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

**5** — On considère quatre ensembles $A, B, C$ et $D$ et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

**6** — 1) Soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$.
A quelle condition $h$ est-elle unique ?

2) Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall\, x, y \in E$, $\big(f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\big)$.
A quelle condition $h$ est-elle unique ?

## Groupes

**7** — Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ munis des lois $+$ ou $\times$ sont-ils des groupes ?

**8** — Soit $d \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $d\mathbb{Z}$ muni de la loi d'addition des entiers relatifs est un groupe.

**9** — Énumérer les éléments de $S_1, S_2, S_3$. Lesquels de ces groupes sont abéliens ?

**10** — Écrire les tables d'additions de $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

**11** — Soit $X$ un ensemble et $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $X$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, on définit l'application $f + g$ par

$$\forall x \in X, (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Montrer que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ muni de la loi $+$ est un groupe abélien.

**12** — Soit $G$ un groupe.

1) Montrer que $G$ est abélien si et seulement si pour tout $a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2 b^2$.
2) On suppose que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que $G$ est abélien.

**13** — L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition des applications est-il un groupe ?

**14** — Soient $G, H$ deux groupes. On munit $G \times H$ de l'opération

$$\forall g, g' \in G, \forall h, h' \in H, (g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh').$$

1) Montrer que $G \times H$ muni de la loi $\cdot$ est un groupe.
2) On considère le cas $G = H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comparer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.