Université Pierre-et-Marie Curie
Licence de mathématiques, 2ème année. Cours *Groupes de permutations et groupes d'isométries*, examen du 5 janvier 2017.
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 2 heures. *Les documents et calculatrices sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1.
a) Donnez un exemple d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui est injective mais non surjective.
b) Donnez un exemple d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui est surjective mais non injective.
c) Donnez un exemple d'une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui est d'ordre infini comme élément du groupe $S_{\mathbb{Z}}$.

Exercice 2. Soit σ la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 4 & 9 & 6 & 19 & 7 & 8 & 14 & 11 & 2 & 5 & 13 & 15 & 18 & 12 & 10 & 16 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez la signature de σ ainsi que son ordre. Calculez σ^{59}.

Exercice 3. Combien y a-t-il de 4-cycles dans S_6 ? (On ne demande pas d'en donner la liste complète).

Exercice 4. Quels sont tous les ordres possibles pour un élément de S_7 ?

Exercice 5. Soit f l'application $\sigma \mapsto \sigma^2$ de S_3 dans lui-même. Est-ce que f est un morphisme de groupes ?

Exercice 6. Soient f et g les transformations de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ données par les formules

$$f\colon z \mapsto iz - 7 \text{ et } g\colon z \mapsto i\overline{z} - 2.$$

Donnez la nature de f et g (rotation, translation, symétrie glissée) et pour chacune d'elles ses éléments remarquables (le vecteur dans le cas d'une translation, le centre et l'angle dans le cas d'une rotation, l'angle et le vecteur de glissement dans le cas d'une symétrie glissée).

Soit u la rotation centrée à l'origine et d'angle $-\pi/2$. Donnez la nature et les éléments remarquables de $u \circ f$ et de $f \circ u$.