Université Pierre-et-Marie Curie

Licence de mathématiques, 2ème année. Cours *Groupes de permutations et groupes d'isométries*, corrigé de l'examen du 5 janvier 2017.

Enseignant : Antoine Ducros

Durée : 2 heures. *Les documents et calculatrices sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1.

a) L'application $n \mapsto n + 1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est injective (si $n + 1 = m + 1$ alors $m = n$) mais n'est pas surjective : 0 n'appartient pas à son image, puisqu'il n'est pas de la forme $n + 1$ avec n dans $\mathbb{N}$.

b) Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même définie par les formules suivantes :

- si $n \geq 1$ alors $f(n) = n - 1$;
- $f(0) = 0$.

L'application f est surjective : on a en effet par construction $n = f(n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle n'est pas injective car $f(1) = f(0) = 0$.

c) Soit τ l'application $n \mapsto n + 1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. C'est une bijection : tout élément n de $\mathbb{Z}$ a un unique antécédent par τ , à savoir $n - 1$. Soit k un entier > 0 . On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'égalité $\tau^k(n) = n + k$ (on le vérifie par une récurrence immédiate sur k) ; la bijection τ^k est donc différente de l'identité (elle n'a même aucun point fixe). Comme ceci est vrai pour tout $k > 0$ l'ordre de τ dans $S_{\mathbb{Z}}$ est infini.

Exercice 2. On commence par écrire σ comme produit de cycles à supports deux à deux disjoints. L'algorithme vu en cours conduit à la décomposition

$$(1 \ 3 \ 9 \ 11 \ 5 \ 19) (2 \ 4 \ 6 \ 7 \ 8 \ 14 \ 18 \ 17 \ 16 \ 10) (12 \ 13 \ 15),$$

qui comprend un 6-cycle, un 10-cycle et un 3-cycle.

La signature de σ est donc égale à

$$(-1)^{6-1}(-1)^{10-1}(-1)^{3-1} = 1.$$

Et l'ordre de σ est le PPCM de 10, 6 et 3, à savoir 60.

Puisque σ est d'ordre 60 on a $\sigma^{60} = \text{Id}$. Par conséquent σ^{59} est égal à σ^{-1} , c'est-à-dire à

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 19 & 10 & 1 & 2 & 11 & 4 & 6 & 7 & 3 & 16 & 9 & 15 & 12 & 8 & 13 & 17 & 18 & 14 & 5 \end{array} \right).$$

Exercice 3. Si P est une partie de $\{1, \dots, 6\}$ de cardinal 4 alors le nombre de 4-cycles de S_6 de support P est égal d'après le cours à $(4 - 1)! = 3! = 6$. Le

nombre total de 4-cycles de S_6 est donc égal à

$$\binom{6}{4} \cdot 6 = \frac{6!}{4!2!} \cdot 6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 6 = 15 \cdot 6 = 90.$$

Exercice 4. Nous allons donner dans le tableau ci-dessous la liste de tous les types de décomposition possibles d'un élément de S_7 comme produit de cycles à supports disjoints ; pour chacun d'eux, nous mettons dans la colonne de droite l'ordre correspondant (qui est le PPCM des longueurs des cycles). Nous décrivons un type donné de décomposition par la liste des longueurs des cycles qu'elle comprend, donnée dans l'ordre croissant, et en répétant chaque longueur autant de fois qu'elle apparaît ; la liste vide correspond au cas où il n'y a aucun cycle, donc à celui de la permutation identité.

Type	Ordre
$\emptyset$	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
2, 2	2
2, 3	6
2, 4	4
2, 5	10
3, 3	3
3, 4	12
2, 2, 2	2
2, 2, 3	6

Les ordres possibles d'un élément de S_7 sont donc 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12.

Exercice 5. Soit τ la transposition (12) et soit σ la transposition (23). Le produit $\tau\sigma$ est égal au 3-cycle (123). On a $f(\sigma) = \sigma^2 = \text{Id}$ et $f(\tau) = \tau^2 = \text{Id}$. Par ailleurs $f(\sigma\tau) = (\sigma\tau)^2 = (123)^2 = (132)$. Ainsi $f(\sigma\tau) \neq f(\sigma)f(\tau)$, et f n'est donc pas un morphisme de groupes.

Exercice 6. *Étude de f .* Il résulte du cours que f est une rotation d'angle $\text{Arg}(i) = \pi/2$ (modulo 2π). Son centre est alors son unique point fixe, qu'on

trouve en écrivant

$$\begin{aligned} f(z) = z &\iff z = iz - 7 \\ &\iff z(1 - i) = -7 \\ &\iff z = \frac{-7}{1 - i} = \frac{-7(1 + i)}{2} = -\frac{7}{2} - \frac{7}{2}i. \end{aligned}$$

Ainsi f est la rotation de centre $-\frac{7}{2} - \frac{7}{2}i$ et d'angle $\pi/2$.

Étude de g . Il résulte du cours que g est une symétrie glissée. Nous allons tout d'abord trouver son vecteur de glissement. Pour ce faire, on calcule g^2 . C'est l'isométrie qui envoie un élément z de $\mathbb{C}$ sur

$$\begin{aligned} g(g(z)) &= g(i\bar{z} - 2) \\ &= i(\overline{i\bar{z} - 2}) - 2 \\ &= i(-iz - 2) - 2 \\ &= z - 2 - 2i. \end{aligned}$$

Ainsi, g^2 est la translation de vecteur $-2 - 2i$. On déduit alors du cours que le vecteur de glissement v de g est égal à $\frac{-2-2i}{2} = -1 - i$.

Il reste à déterminer l'axe de g . C'est d'après le cours l'ensemble des points fixes de $T_{-v} \circ g$. Cette dernière isométrie est égale à

$$z \mapsto g(z) + 1 + i = i\bar{z} - 2 + 1 + i = i\bar{z} - 1 + i.$$

Pour trouver l'ensemble de ses points fixes, on écrit

$$\begin{aligned} i\bar{z} - 1 + i = z &\iff i(\bar{z} + 1) = z + 1 \\ &\iff e^{i\pi/2}\overline{z + 1} = z + 1 \\ &\iff e^{i\pi/4}\overline{z + 1} = e^{-i\pi/4}(z + 1) \\ &\iff \overline{e^{-i\pi/4}(z + 1)} = e^{-i\pi/4}(z + 1) \\ &\iff e^{-i\pi/4}(z + 1) \in \mathbb{R} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, e^{-i\pi/4}(z + 1) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, z = \lambda e^{i\pi/4} - 1. \end{aligned}$$

L'ensemble des points fixes de $z \mapsto g(z) + 1 + i$ est donc $\{\lambda e^{i\pi/4} - 1\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, c'est-à-dire la droite passant par (-1) et dirigée par $e^{i/\pi/4}$ (c'est-à-dire parallèle à la diagonale).

En conclusion, g est la symétrie glissée d'axe passant par (-1) et dirigé par $e^{i\pi/4}$, et de vecteur de glissement $-1 - i$.

Étude de $f \circ u$ et $u \circ f$. L'isométrie u est donnée par la formule $z \mapsto -iz$. Par conséquent $f \circ u$ est donnée par la formule

$$z \mapsto iu(z) - 7 = i(-iz) - 7 = z - 7.$$

C'est donc la translation de vecteur -7 .

Et $f \circ u$ est donnée par la formule

$$z \mapsto -if(z) = -i(iz - 7) = z + 7i.$$

C'est donc la translation de vecteur $7i$.