Contrôle continu 2 - Corrigé

Exercice 1 (6 pts)**.** Soit σ une permutation de S_{10} d'ordre 14.

1. Donner un exemple d'une telle permutation.

Solution : Tout produit d'une transposition et d'un 7-cycle à supports disjoints.
Exemple : $\sigma = (1\ 2)(9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3)$.

2. Prouver que σ est nécessairement impaire.

Solution : L'ordre d'une permutation $\omega \in \mathcal{S}_n$ est le ppcm des longueurs des cycles de la décomposition de ω en cycles à supports disjoints. De plus, la somme des longueurs de ces cycles (ceux de longueur 1 – les points fixes – y compris) vaut n.
Pour une permutation d'ordre 14 dans $\mathcal{S}_{10}$, il n'y a qu'un type possible: $7-2-1$, un 7-cycle et une transposition. La signature vaut alors $(-1)^{7-1}(-1)^{2-1} = -1$.

3. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 14 de S_{10}.

Solution : Dans $\mathcal{S}_{10}$ on a $\binom{10}{7}6!$ 7-cycles possibles. Les trois éléments restants forment une transposition et un point fixe. Il y a donc $\binom{3}{2}$ façons de choisir la transposition une fois le 7-cycle fixé. En total, on obtient $3\binom{10}{7}6!$ éléments d'ordre 14 dans S_{10}.

Exercice 2 (4 pts)**.** Soit $n \geq 3$ un entier.

1. Montrer que le produit de deux transpositions distinctes de $\mathcal{S}_n$ est un 3-cycle ou un produit de deux 3-cycles.

Solution : On vérifie les deux formules:
$(a\,b)(b\,c) = (a\,b\,c)$ pour a, b, c distincts,
$(a\,b)(c\,d) = (a\,b)(b\,c)(b\,c)(c\,d) = (a\,b\,c)(b\,c\,d)$, pour a, b, c, d distincts.

2. En déduire que tout élément de $A_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \text{ paire} : \varepsilon(\sigma) = 1\}$ peut s'écrire comme produit de 3-cycles.

Solution : On déduit que toute permutation paire, s'écrivant comme produit d'un nombre pair de transpositions, peut s'écrire comme produit de 3-cycles.

Le groupe alterné A_n est donc engendré par les 3-cycles.

 anca.nitulescu@ens.fr

Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | \ z^n = 1\} \subset \mathbb{C}$ et l'application $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, \quad f_n(k) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

1. Démontrer que $\mathcal{U}_n$ muni de la multiplication est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Solution : On utilise le critère connu : $1^n = 1 \Rightarrow 1 \in \mathcal{U}_n$, donc $\mathcal{U}_n$ n'est pas vide. Soit $z_1, z_2 \in \mathcal{U}_n$. On a $(z_1 z_2^{-1})^n = z_1^n (z_2^n)^{-1} = 1$, donc $(z_1 z_2^{-1}) \in \mathcal{U}_n$. Par conséquent, $(\mathcal{U}_n, \times)$ est un sous-groupe.

2. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Montrer que le groupe $\mathcal{U}_n$ est engendré par ω : $\mathcal{U}_n = \langle \omega \rangle$.

Solution : $\mathcal{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid 0 \leq k < n\} = \{1, \omega, \omega^2 \ldots \omega^{n-1}\}$, ce qui correspond aux puissances de ω.

3. Montrer que, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, si n divise m alors $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$.

Solution : On écrit $m = kn$ avec $k \in \mathbb{N}$. Pour $z \in \mathcal{U}_n$ on a $z^m = z^{kn} = (z^n)^k = 1$, donc $z \in \mathcal{U}_m$.

4. Montrer que f_n est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Solution : Soit $k, \ell \in \mathbb{Z}$: $f_n(k + \ell) = e^{i\frac{2(k+\ell)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} e^{i\frac{2\ell\pi}{n}} = f_n(k) f_n(\ell)$.
Cela montre que f_n est un morphisme de groupes.

5. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f_n)$ et l'image $\mathrm{Im}(f_n)$.

Solution : Soit $k \in \mathrm{Ker}(f_n)$: $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Z}$ t.q. $\dfrac{2k\pi}{n} = 2d\pi \Leftrightarrow k = nd$, donc $\mathrm{Ker}(f_n) = n\mathbb{Z}$.
C'est evident que l'image de f_n est incluse dans $\mathcal{U}_n$ car $\forall k \in \mathbb{Z} \ (f_n(k))^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = 1$.
D'après la question 2 on a aussi $\mathcal{U}_n \subset \mathrm{Im}(f_n)$, donc $\mathrm{Im}(f_n) = \mathcal{U}_n$.

Exercice 4 (5 pts)**.** Montrer que :

1. L'ensemble $\mathcal{P} = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Solution : $\mathcal{P}$ n'étant pas vide, on applique le critère : Soit $2^k, 2^\ell \in \mathcal{P}$: on a $k - \ell \in \mathbb{Z}$, donc $2^{k-\ell} = 2^k(2^\ell)^{-1} \in \mathcal{P}$. Par conséquent, $(\mathcal{P}, \times)$ est un sous-groupe.

2. L'ensemble $\mathcal{F} = \{f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f_\theta(z) = e^{i\theta} z, \ \theta \in \mathbb{R}\}$, muni de la loi de composition des applications, est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, noté $(\mathcal{S}_\mathbb{C}, \circ)$.

Solution : Pour $\theta = 0$ on a $f_0 = \mathrm{id}$, qui est l'élément neutre de $(\mathcal{S}_\mathbb{C}, \circ)$, appartient à $\mathcal{F}$.
Soit $\theta, \phi \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{C}, \ f_\theta \circ f_\phi(z) = e^{i\theta} e^{i\phi} z = e^{i(\theta+\phi)} z = f_{\theta+\phi}(z)$ et $f_{\theta+\phi} \in \mathcal{F}$, donc $f_\theta \circ f_\phi \in \mathcal{F}$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{C}, \ f_{-\theta} \circ f_\theta(z) = e^{i(\theta-\theta)} z = z$, d'où $f_{-\theta} \circ f_\theta = \mathrm{id}$ et $f_\theta^{-1} = f_{-\theta} \in \mathcal{F}$.
Cela prouve que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_\mathbb{C}, \circ)$.

3. L'ensemble $\mathcal{A} = 5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Solution : Par exemple $25 \in \mathcal{A}$ et $-8 \in \mathcal{A}$, mais $25 + (-8) = 17 \notin \mathcal{A}$.