Contrôle continu 1 - Corrigé

Exercice 1. Soit E un ensemble. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B.$$

Solution : On démontrera l'assertion de deux manières différentes.

– **Solution directe :** Supposons que A et B sont tels que $A \cap B = A \cup B$. Il faut montrer que $A = B$, ce qui revient à deux inclusions, $A \subset B$ et $B \subset A$.
$A \subset B$: Étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.
$B \subset A$: Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.

– **Solution par contraposition :** Supposons que $A \neq B$ ce qui nous mènera à une contradiction.
Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. D'où la contradiction $A \cap B \neq A \cup B$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. Solution : f est paire : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(-x)$;
2. Solution : f ne s'annule jamais : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
3. Solution : f est périodique : $\exists a \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + a) = f(x)$;
4. Solution : f est croissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$;
5. Solution : f est strictement décroissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
6. Solution : f n'est pas la fonction nulle : $\exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
7. Solution : f est injective : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$;
8. Solution : f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = n.$

Exercice 3 (15 pts)**.** Soient $\sigma = (1\ 3\ 5\ 4\ 2)$ et $\tau = (5\ 3\ 2\ 6)$ deux permutations dans S_6.

1. Vérifier si σ et τ commutent.

Solution : Après avoir fait les calculs on remarque que $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

2. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation $\alpha = \sigma \circ \tau$.

Solution : Les cycles $\sigma = (1\ 3\ 5\ 4)$ et $\tau = (5\ 3\ 2\ 6)$ ne sont pas à supports disjoints. Une décomposition de α en produit de cycles à supports disjoints est : $(1\ 3)(2\ 6\ 4)$.

3. Trouver deux écritures différentes de la permutation α en produits de transpositions.

Solution : Les deux écritures de la permutation α s'obtiennent en écrivant le cycle $(2\ 6\ 4)$ en produits de transpositions : $(2\ 6)(4\ 6)$ ou $(4\ 6)(2\ 4)$. On obtient les deux décompositions :

$$\alpha = (1\ 3)(2\ 6)(4\ 6) = (1\ 3)(4\ 6)(2\ 4).$$

4. Donner l'inverse α^{-1} de α.

Solution : $\alpha^{-1} = ((1\ 3) \circ (2\ 6\ 4))^{-1} = (2\ 6\ 4)^{-1}(1\ 3)^{-1} = (4\ 6\ 2)(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 3\ 4\ 1\ 6\ 5\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Détérminer le plus petit entier $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^\ell = \mathrm{id}$.

Solution : On a que $(1\ 3)^2 = \mathrm{id}$, $(2\ 6\ 4)^3 = \mathrm{id}$ et $(1\ 3)$ commute avec $(2\ 6\ 4)$, donc $\alpha^6 = \mathrm{id}$. C'est facile à vérifier que 6 est le plus petit entier avec cette proprieté, d'où $\ell = 6$.

6. Calculer α^{13}.

Solution : On écrit $\alpha^{13} = \alpha^{12} \circ \alpha = (\alpha^6)^2 \circ \alpha = \mathrm{id} \circ \alpha = \alpha$.

7. Combien y a-t-il de cycles de longueur 4 dans S_6 ?

Solution : Le nombre des k-cycles dans S_n est déterminé par :
– les k éléments differents qui composent le cycle : il y a $\binom{n}{k}$ façons de les choisir dans $\{1, \dots, n\}$;
– l'ordre dans lequel les éléments interviennent dans le cycle : il y a $(k-1)!$ façons de choisir l'ordre, le premier élément étant fixé comme le plus petit des k éléments différents choisis.
On obtient $\binom{n}{k}(k-1)! = \frac{1}{k}\frac{n!}{(n-k)!}$ k-cycles possibles. Pour $n = 6, k = 4$ on a 90 choix possibles.

8. Montrer que si C est un k-cycle dans S_n, alors pour toute permutation $\gamma \in S_n$, $\gamma C \gamma^{-1}$ est un k-cycle.

Solution : Soit $C = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ pour $a_i \in Supp(C)$. Montrons que $\gamma C \gamma^{-1} = (\gamma(a_1)\ \gamma(a_2)\ \dots\ \gamma(a_k))$. Distinguons deux cas :

(a) Si x est un entier distinct des $\gamma(a_i)$, pour tout $i \leq k$, alors $\gamma^{-1}(x)$ est different de tout a_i, donc $\gamma^{-1}(x) \in Fix(C)$. On a que :

$$\gamma \circ C \circ \gamma^{-1}(x) = \gamma \circ C(\gamma^{-1}(x)) = \gamma(\gamma^{-1}(x)) = x = (\gamma(a_1)\ \gamma(a_2)\ \dots\ \gamma(a_k))(x).$$

(b) Si maintenant x vaut $\gamma(a_i)$, pour un $i \leq k$, alors

$$\gamma \circ C \circ \gamma^{-1}(x) = \gamma \circ C \circ \gamma^{-1}(\gamma(a_i)) = \gamma \circ C(a_i) = \gamma(C(a_i)) = \gamma(a_{i+1}).$$

Les indices étant évidemment pris modulo k. Dans les deux cas, on a l'égalité annoncée.