Contrôle continu 2

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun matériel (calculatrice, téléphone portable, etc.) ou document n'est autorisé. Durée : 45 minutes

Exercice 1 (6 pts)**.** Soit σ une permutation de S_{10} d'ordre 14.

1. Donner un exemple d'une telle permutation.
2. Prouver que σ est nécessairement impaire.
3. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 14 de S_{10}.

Exercice 2 (4 pts)**.** Soit $n \geq 3$ un entier.

1. Montrer que le produit de deux transpositions distinctes de $\mathcal{S}_n$ est un 3-cycle ou un produit de deux 3-cycles.
2. En déduire que tout élément de $A_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \text{ paire} : \varepsilon(\sigma) = 1\}$ peut s'écrire comme produit de 3-cycles.

Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} |\ z^n = 1\} \subset \mathbb{C}$ et l'application :

$$f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*,$$
$$f_n(k) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{U}_n$ muni de la multiplication est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Montrer que le groupe $\mathcal{U}_n$ est engendré par ω : $\mathcal{U}_n = \langle \omega \rangle$.
3. Montrer que, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, si n divise m alors $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$.
4. Montrer que f_n est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
5. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f_n)$ et l'image $\mathrm{Im}(f_n)$.

Exercice 4 (5 pts)**.** Montrer que :

1. L'ensemble $\mathcal{P} = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
2. L'ensemble $\mathcal{F} = \{f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f_\theta(z) = e^{i\theta}z,\ \theta \in \mathbb{R}\}$, muni de la loi de composition des applications, est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, noté $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}, \circ)$.
3. L'ensemble $\mathcal{A} = 5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.