Contrôle continu 1

Les exercices peuvent être traités indépendamment. Certaines questions, plus difficiles, sont marquées d'une étoile ($\star$). La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun matériel (calculatrice, téléphone portable, etc.) ou document n'est autorisé.
Durée : 45 minutes

Exercice 1 (2 pts)**.** Soit E un ensemble. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B.$$

Exercice 2 (8 pts)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est paire ;
2. f ne s'annule jamais ;
3. f est périodique ;
4. f est croissante ;
5. f est strictement décroissante ;
6. f n'est pas la fonction nulle ;
7. f est injective ;
8. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

Exercice 3 (15 pts)**.** Soient $\sigma = (1\ 3\ 5\ 4\ 2)$ et $\tau = (5\ 3\ 2\ 6)$ deux permutations dans S_6.

1. Vérifier si σ et τ commutent.
2. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation $\alpha = \sigma \circ \tau$.
3. Trouver deux écritures différentes de la permutation α en produits de transpositions.
4. Donner l'inverse α^{-1} de α.
5. Détérminer le plus petit entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^\ell = \mathrm{id}$.
6. Calculer α^{13}.
7. Combien y a-t-il de cycles de longueur 4 dans S_6 ?
8. ($\star$) Montrer que si C est un k-cycle dans S_n (pour $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$), alors pour toute permutation $\gamma \in S_n$, le produit $\gamma C \gamma^{-1}$ est également un k-cycle.

Indication ($\star$) *:* Écrire $C = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$ pour un ordre sur les $a_i \in Supp(C)$ et montrer que la conjuguée $\gamma C \gamma^{-1} = (\gamma(a_1)\ \gamma(a_2)\ \ldots\ \gamma(a_k))$.