| **Nom** | | **Prénom** | |
|---|---|---|---|

*La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.* ***Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte****.*
*Durée : 1h30*

# Devoir sur table 2

***Exercice 1*** [5 pts] Donnez des exemples et justifiez leurs validité :

1. Une primitive de la fonction $x \mapsto f'(x)e^{f(x)}$, où $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$,
2. Une fonction $g$ telle que $\int_{-3}^{3} g(t)\sin(t)dt = 0$.
3. Une fonction $h$ telle que $\left|\int_0^2 h(e^t)dt\right| \leq 2$.
4. Une famille de vecteurs ni libre, ni génératrice dans $\mathbb{R}^3$,
5. Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec le noyaux $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{(0,0)\}$.

***Exercice 2*** [10 pts] Soit $u_n$ et $v_n$ deux suites définies par : $u_0 = v_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} = v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. Pour tout entier $n$, on note $X_n$ le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Exprimez la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A$ est une matrice à déterminer.
2. Calculez le polynôme caractéristique $P_A(x)$.
3. Expliquez, sans calcul, pourquoi $A$ est diagonalisable.
4. Détérminez les valeurs propres de la matrice $A$.
5. Calculez les espaces de vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées.
6. Déterminez une base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2\}$ de vecteurs propres, telle que la première coordonnée de $v_1$ et de $v_2$ soit égale à 1.
7. Écrivez la matrice de passage $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ et calculez $P^{-1}$.
8. Détérminez la forme diagonale de $A$ en calculant $D = P^{-1}AP$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimez $A^n$ en fonction de $P$ et $D^n$. Calculez explicitement $A^n$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimez $u_n$ en fonction de $A$ et $u_0$ puis calculez explicitement $u_n$.

***Exercice 3*** [10 pts] Pour tout entier $n$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.$$

1. Calculez $I_0$ et $I_1$.
2. Etudiez la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminez le signe de $I_n$ pour tout entier $n$.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
5. Montrez : $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
6. Déterminez la limite de $I_n$.
7. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que

$$2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Déterminez la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$.
10. Aproximez les intégrales $I_n$ avec une erreur d'ordre $\frac{1}{n^2}$ pour tout entier $n$.