

Nom		Prénom	
------------	--	---------------	--

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. **Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.** Durée : 1h00

Devoir sur table

Exercice 1 [5 pts] Donnez des exemples de :

1. une suite monotone et convergente,
2. une suite croissante et bornée,
3. une suite divergente et décroissante,
4. une suite convergente de limite -5 ,
5. deux suites adjacentes,
6. une matrice égale à sa transposée,
7. une matrice avec le déterminant nul,
8. une matrice échelonnée mais pas réduite,
9. une matrice échelonnée réduite,
10. une matrice inversible et son inverse.

Exercice 2 [5 pts] Soit deux matrices-lignes $X = (-2 \ 2 \ -3)$ et $Y = (2 \ 0 \ -1)$:

1. Calculez X^tY et tXY .
2. Déterminez la transposée de la matrice $A = {}^tYX$.
3. Calculez le déterminant de la matrice A . Est-elle inversible ?
4. Trouvez la forme échelonnée réduite de la matrice $B = A + 4I_3$.
5. Décidez si B est inversible et dans le cas échéant, calculez son inverse.

Exercice 3 [5 pts] On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec : $F(x) = \frac{1}{2}(x + x^2)$.

1. Montrez que la suite u_n est bien définie pour $u_0 = 1/2$ et pour $u_0 = -1/2$.
2. Étudiez la monotonie de la suite u_n dans le cas $u_0 = 1/2$. Est-elle bornée ? Est-elle convergente ?
3. Déterminez les points fixes de F . En déduire la limite de la suite u_n pour $u_0 = 1/2$.
4. Montrez que $F(I) \subset I$ pour l'intervalle $I = [-1, 0]$ et que F est $(\frac{1}{2})$ -contractante sur I .
5. Argumentez la convergence de u_n pour $u_0 = -1/2$ et trouvez sa limite.

Exercice 4 [3 pts] Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. On considère $a \in [0, 1]$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Justifiez avec des résultats du cours ou donnez des contre exemples.

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
5. Si (u_n) converge vers une limite l , alors l est un point fixe de f .
6. Si f a plusieurs points fixes, alors (u_n) est divergente.

Exercice 5 [2 pts] Trouvez b tel que le système
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ -3x + 2y - z = -5 \\ x - 3y - 2z = b \end{cases}$$
 n'ait pas de solution.