Devoir sur table 2 - Corrigé

Exercice 1 [5 pts] Donnez des exemples et justifiez leurs validité :

1. Une primitive de la fonction $x \mapsto f'(x)e^{f(x)}$, où f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$,

Solution : $F(x) = e^{f(x)}$.

2. Une fonction g telle que $\int_{-3}^{3} g(t)\sin(t)dt = 0$.

Solution : Toute fonction paire $g(-t) = g(t)$, par exemple $g(t) = t^2$. La fonction $g(t)\sin(t)$ sera impaire.

3. Une fonction h telle que $\left|\int_0^2 h(e^t)dt\right| \leq 2$.

Solution : Toute fonction tel que $|h(t)| \leqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$, par exemple $h(t) = \cos t$.
On a que $\left|\int_0^2 h(e^t)dt\right| \leqslant \int_0^2 \left|h(e^t)\right| dt \leqslant \int_0^2 1dt = 2$.

4. Une famille de vecteurs ni libre, ni génératrice dans $\mathbb{R}^3$,

Solution : $\mathcal{F} = \{(0,1,2),(0,3,6)\}$.

5. Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec le noyaux $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{(0,0)\}$.

Solution : $\varphi(x,y) = (0,y,x)$. On a que $\varphi(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Exercice 2 [10 pts] Soit u_n et v_n deux suites définies par : $u_0 = v_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. Pour tout entier n, on note X_n le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Exprimez la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice à déterminer.

Solution : $X_{n+1} = \begin{pmatrix} v_n \\ 2u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. D'où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculez le polynôme caractéristique $P_A(x)$.

Solution : $P_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = x(x-1) - 2 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

3. Expliquez, sans calcul, pourquoi A est diagonalisable.

Solution : La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si le polynôme $P_A(x)$ admet deux racines dans $\mathbb{R}$.
En effet, $P_A(x)$ admet comme racines 2 et -1.

4. Détérminez les valeurs propres de la matrice A.

Solution : Les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$ sont les racines de $P_A(x)$.

5. Calculez les espaces de vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées.

Solution : $V_2 = \text{Ker}\,(A - 2I_2) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\}$.
$V_{-1} = \text{Ker}\,(A + I_2) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\}$.

6. Déterminez une base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2\}$ de vecteurs propres, telle que la première coordonnée de v_1 et de v_2 soit égale à 1.

Solution : On cherche $v_1 \in V_2$ et $v_2 \in V_{-1}$.
Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. Écrivez la matrice de passage $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ et calculez P^{-1}.

Solution : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

8. Détérminez la forme diagonale de A en calculant $D = P^{-1}AP$.

Solution : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P et D^n.

Solution : $D^n = P^{-1}A^nP$, d'où $A^n = PD^nP^{-1}$.

Calculez explicitement A^n.

Solution : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de A et u_0 puis calculez explicitement u_n.

Solution : $X_n = A^nX_0 = A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [10 pts] Pour tout entier n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.$$

1. Calculez I_0 et I_1.

Solution : $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$.
$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}dx = I_0 - \int_0^1 xe^{-2x}dx$.
On applique une intégration par parties à $\int_0^1 xe^{-2x}dx$: $\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = e^{-2x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$
on obtient $I_1 = I_0 + \frac{1}{2}\left[xe^{-2x}dx\right]_0^1 - \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2}$.

2. Etudiez la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Solution</u> : Pour $x \in [0,1]$ on a que $(1-x)^{n+1}e^{-2x} \leqslant (1-x)^n e^{-2x}$ d'où $\quad I_{n+1} \leqslant I_n$.
Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Déterminez le signe de I_n pour tout entier n.

<u>Solution</u> : Pour $x \in [0,1]$ on a $(1-x)^n e^{-2x} \geqslant 0$ d'où $\quad I_n \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Donc I_n est positive.

4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

<u>Solution</u> : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

5. Montrez : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

<u>Solution</u> : $(n+1)I_n = \int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^{-2x}dx \leqslant \int_0^1 (n+1)(1-x)^n dx = \left[-(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = 1$.
On a que $(n+1)I_n \leqslant 1$.

6. Déterminez la limite de I_n.

<u>Solution</u> : Comme $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, par la théorème des gendarmes on obtient que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

7. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Solution</u> : On applique l'intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = e^{-2x} & v'(x) = (1-x)^n \\ u'(x) = -2e^{-2x} & v(x) = -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \end{cases}$

8. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Solution</u> : On applique la limite à l'identité antérieure : $\lim_{n\to\infty} 2I_{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty}(n+1)I_n$.
En utilisant $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ on obtient $2\lim_{n\to\infty} I_{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} nI_n - \lim_{n\to\infty} I_n$.
D'où $\lim_{n\to\infty} nI_n = 1$.

9. Déterminez la limite de la suite $(n(nI_n-1))_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Solution</u> : On applique la limite à l'identité $n(I_n - 2I_{n+1}) = n(nI_n - 1)$.
En écrivant $n(nI_n-1) = nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1}$ on obtient $\lim_{n\to\infty} n(nI_n-1) = 1-2+0 = -1$.

10. Aproximez les intégrales I_n avec une erreur d'ordre $\frac{1}{n^2}$ pour tout entier n.

<u>Solution</u> : On se propose de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \varepsilon(n)$$

où $\lim_{n\to\infty} n^2\varepsilon(n) = 0$. En appliquant successivement la limite à I_n, nI_n et $(n(nI_n-1))$ on obtient $a = 0, b = 1$ et $c = -1$.