Devoir sur table - Corrigé

Exercice 1 Donnez des exemples de :

1. une suite monotone et convergente,

Solution : $u_n = \frac{1}{n}$ ou $v_n = \frac{1}{10^n}$ sont des suites décroissantes convergentes de limite 0.

2. une suite croissante et bornée,

Solution : $u_n = -\frac{1}{n}$ ou $v_n = -2^{-n}$ suites croissantes bornées : $-1 \leq u_n, v_n \leq 0$, d'où $|u_n|, |v_n| \leq 1$.

3. une suite divergente et décroissante,

Solution : $u_n = -n$ est une suite décroissantes de limite $-\infty$. Toute suite décroissante et pas bornée.

4. une suite convergente de limite -5,

Solution : $u_n = -5$ suite constante. Toute somme de suites $w_n = u_n + v_n$ où v_n convergente de limite 0.

5. deux suites adjacentes,

Solution : $u_n = 1 + \frac{1}{n}, v_n = 1 - \frac{1}{n}$. On a : u_n décroissante, v_n croissante, $u_n \geq v_n$ et $\lim(u_n - v_n) = 0$.

6. une matrice égale à sa transposée,

Solution : $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Toute matrice carrée symétrique par rapport à sa diagonale.

7. une matrice avec le déterminant nul,

Solution : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. Toute matrice avec deux lignes (ou colonnes) proportionnelles. $(L_2 = -3L_1)$

8. une matrice échelonnée mais pas réduite,

Solution : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$: pivots différents de 1, collonnes des pivots avec autres valeurs non-nulles.

9. une matrice échelonnée réduite,

Solution : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: pivots 1, collonnes des pivots avec toutes autres valeurs nulles.

10. une matrice inversible et son inverse.

Solution : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. Toute matrice carrée de détérminant non-nul.

Exercice 2 Soit deux matrices-lignes $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

1. Calculez X^tY et ${}^tXY$.

Solution : Rappelons la multiplication des matrices de type (m, n) et (n, p) :
$\text{type}(X^tY) = \text{type}(1,3) \times \text{type}(3,1) = (1,1)$. On obtient une matrice avec un élément : $X^tY = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$.
$\text{type}({}^tXY) = \text{type}(3,1) \times \text{type}(1,3) = (3,3)$.
On obtient une matrice carrée de taille 3 : ${}^tXY = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Détérminez la transposée de la matrice $A = {}^tYX$.

Solution : Rappelons la propriété de la transposée d'un produit des matrices : ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$
On applique pour : ${}^t({}^tYX) = {}^tX\ {}^t({}^tY) = {}^tXY = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Calculez le déterminant de la matrice A. Est-elle inversible ?

Solution : Rappelons la propriété du détérminant de la transposée d'une matrice :
$\det(A) = \det({}^tA) = 0$ car ${}^tA$ possède une collonne éntierement nulle.
On déduit que A n'est pas inversible car elle a le détérminant nul.

4. Trouvez la forme échelonnée réduite de la matrice $B = A + 4I_3$.

Solution : $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.
En faisant des opérations sur les lignes de la matrice $(B|I_3)$ on détermine la forme échelonnée réduite de la matrice B et, si B est inversible, on trouve son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{4}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 4L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 + L_2]{L_3 \to -\frac{1}{6}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{7}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right)$$

5. Décidez si B est inversible et dans le cas échéant, calculez son inverse.

Solution : Comme la forme échelonnée réduite de la matrice B est égale à la matrice identité I_3, B est inversible et son inverse – d'après le calcul anterieur – est :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = F(u_n)$, avec : $F(x) = \dfrac{1}{2}(x+x^2)$.

1. Montrez que la suite u_n est bien définie pour $u_0 = 1/2$ et pour $u_0 = -1/2$.

Solution : Comme $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. On conclue que la suite u_n est bien définie pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, en particulier pour $u_0 = 1/2$ et pour $u_0 = -1/2$.

2. Étudiez la monotonie de la suite u_n dans le cas $u_0 = 1/2$. Est-elle bornée ? Est-elle convergente ?

Solution : On suit les pas habituels pour étudier une suite définie par une fonction :

• Les variations de F :
La fonction polynomiale F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $F'(x) = \frac{1}{2} + x$, qui est positive sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. Par conséquent, F est croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et pour $u_0 \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ la suite u_n est **monotone**.

• Le signe de $F(x) - x = \frac{1}{2}(x^2 - x)$:
On régarde les prémiers termes de la suite u_n pour conclure : $u_1 - u_0 = F(u_0) - u_0 = -\frac{1}{8} < 0$. La suite est donc **décroissante** pour $u_0 = 1/2$.

• Un intervalle stable pour F :
F est croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $F(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$, donc $F([-\frac{1}{2}, +\infty[) \subset [-\frac{1}{8}, +\infty[\subset [-\frac{1}{2}, +\infty[$.
On déduit que pour $u_0 = 1/2$, $u_n \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc u_n minorée par $-\frac{1}{2}$.
Comme u_n est décroissante, elle est majorée par son prémier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.
On a trouvé que u_n est **bornée** par $\frac{1}{2}$: $|u_n| \leq \frac{1}{2}$.

• Comme $(u_n)_n$ est décroissante et bornée, alors elle est **convergente**.

3. Déterminez les points fixes de F. En déduire la limite de la suite u_n pour $u_0 = 1/2$.

Solution :
• Les points fixes de F sont les solutions de l'équation $F(x) = x$.
On doit résoudre $\frac{1}{2}(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$.
Les deux solutions sont $x = 0$ et $x = 1$.

• On cherche la limite de la suite parmis les points fixes de F.
Si F est continue et (u_n) converge vers ℓ, alors $F(\ell) = \ell$.
Pour $u_0 = 1/2$ la suite $u_n \leq 1/2$, d'où la limite ℓ de u_n vérifie $\ell \leq 1/2$. On déduit que $\ell = 0$.

4. Montrez que $F(I) \subset I$ pour l'intervalle $I = [-1, 0]$ et que F est $\left(\frac{1}{2}\right)$-contractante sur I.

Solution : **Attention ! La fonction F n'est pas monotone sur I.**

• Les variations de F :
$F'(x) = \frac{1}{2} + x$, est négative sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ est positive sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. Par conséquent, F n'est pas monotone sur $I = [-1, 0]$.

• I est stable pour F :
F est décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $-\frac{1}{2}$ est un minimum local pour F sur I.
On a $F(-1) = F(0) = 0$ et $F(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$, donc $F([-1, 0]) \subset [-\frac{1}{8}, 0] \subset [-1, 0]$.

• F est $\left(\frac{1}{2}\right)$-contractante sur I :
$F'(x) = \frac{1}{2} + x$ et pour $x \in [-1, 0]$: $\frac{1}{2} - 1 \leq \frac{1}{2} + x \leq \frac{1}{2} + 0$ d'où $|F'(x)| \leq \frac{1}{2}$, donc F contractante.

5. Argumentez la convergence de u_n pour $u_0 = -1/2$ et trouvez sa limite.

Solution : Comme F est $\left(\frac{1}{2}\right)$-contractante sur I, pour $u_0 \in I$, la suite (u_n) est convergente et elle converge vers l'unique point fixe de F dans $[-1, 0]$, $\ell = 0$.

Exercice 4 [3 pts] Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continue. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifiez avec des résultats du cours ou donnez des contre exemples.

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.

<u>Solution</u> : Faux : Si le signe de $f(x) - x$ est négatif ($u_1 < u_0$), on a (u_n) décroissante.

2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.

<u>Solution</u> : Faux : La monotonie de (u_n) ne donne aucune information sur les variations de f.
Contre exemple : $f(x) = 2x + 2\sin(\pi x)$ et $u_0 = 1$, on a $u_n = 2^n$ croissante, mais f n'est pas monotone.

3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.

<u>Solution</u> : Vrai : L'inégalité $u_2 \geq u_1 \geq u_0$ donne $f(u_1) \geq f(u_0)$ pour $u_1 \geq u_0$. Comme f est monotone, on déduit que f est croissante (pour tout $x \geq y : f(x) \geq f(y)$).

4. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.

<u>Solution</u> : Vrai : On a $f(x) - x > 0 \quad \forall x \in [0,1]$.
On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n > 0$, d'où la suite (u_n) est croissante.

5. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est un point fixe de f.

<u>Solution</u> : Vrai : Si f est continue sur $[0,1]$ et si (u_n) converge vers l, alors $f(l) = l$.

6. Si f a plusieurs points fixes, alors (u_n) est divergente.

<u>Solution</u> : Faux : Contre exemple l'exercice 3.3.

Exercice 5 [2 pts] Trouvez b tel que le système $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ -3x + 2y - z = -5 \\ x - 3y - 2z = b \end{cases}$ n'ait pas de solution.

<u>Solution</u> : On note les trois equations du système par L_1, L_2, L_3 : $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 & (L_1) \\ -3x + 2y - z = -5 & (L_2) \\ x - 3y - 2z = b & (L_3) \end{cases}$
On rémarque que la somme $(L_1 + L_2 + L_3)$ donne : $0 = 2 - 5 + b$.
D'où la condition pour que le système ait une solution est $b = 3$.
On impose donc $b \neq 3$.