Feuille TD : Intégrales. Changements de variables

Exercice 1 [Changement de variable] En utilisant des changements de variables, calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad I_2 = \int_0^x \frac{1}{(t)}dt \qquad I_3 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt \qquad I_5 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt.$$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes à l'aide

1. d'un changement de variable d'intégration :

   (a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln^2 t}$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1-t^3}dt$; (c) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ (nouvelle variable $x = 1/t$) ;

   (d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin t(\cos t+1)}$ (nouvelle variable $x = \tan(t/2)$).

2. d'un ou plusieurs changements de variables d'intégration :

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable u telle que $t = \sin u$) ;

   (f) $\displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}dt$ où R est un réel positif. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 3 On considère la suite définie pour tout entier n par $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Calculer u_0.
2. Montrer que cette suite est positive et décroissante.
3. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence pour la suite (u_n).
4. Montrer que cette suite tend vers 0.

Exercice 4 On veut calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t}\cos(t)dt$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, faire apparaître l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t}\sin(t)dt$.
2. Effectuer une intégration par parties dans l'intégrale J pour faire apparaître l'intégrale I.
3. Écrire l'équation obtenue pour I. Si vous obtenez $I = I$, reprenez la question précédente en changeant d'intégration par parties. Sinon, résoudre l'équation pour calculer I.

Exercice 5

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt$.
2. En déduire que pour tout entier n, on a $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_{1}^{n+1} \ln(t)dt$.
3. Calculer pour tout entier n l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(t)dt$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} = 1$.

Exercice 6 [Intégrales de Wallis] Pour tout entier n, on note :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
3. Calculer pour tout entier n les intégrales I_n (on pourra distinguer le cas où n est pair du cas impair).
4. Montrer que la suite I_n est décroissante.
5. En déduire $1 \leq \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+1}{n}$, puis que $\dfrac{I_n}{I_{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
6. En posant $n = 2p$ dans la limite précédente, montrer que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p} \frac{2^{4p}(p!)^4}{((2p)!)^2}.$$

7. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.