Feuille TD : Intégrales et primitives

Exercice 1 [Premiers calculs] Déterminer les primitives des fonctions suivantes, puis calculer l'intégrale demandée.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |t|$. Calculer $\int_{-1}^{1} f(t)dt$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$. Calculer $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.
3. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$. Calculer $F(x) = \int_{x}^{1} f(t)dt$ et déterminer si $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ existe.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Calculer, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^{x} f(t)dt$. Déterminer si $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$ existe.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1+2\cos(2t)}{2}$. Calculer $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

Exercice 2 Sans calcul et avec justifications, donner les valeurs des l'intégrales

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(t^{2015})}{2+\sqrt{1+t^4}}dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t\cos(t^{2016})}{2+\sqrt{1+t^4}}dt.$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Etudier la fonction f. En particulier, montrer que f est décroissante sur l'intervalle $I = [0, 1]$.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I. (pour un repère orthonormé d'unité 5 cm). On note $\mathcal{A}$ l'aire limitée par les axes de coordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe représentative de f. On se propose de calculer une valeur approchée de $\mathcal{A}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :
$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad S'_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$
3. Interpréter géométriquement S_n et S'_n et représenter S_{10}, S'_{10} sur le graphique de la question 2. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer en fonction de n et de f la quantité $|S_n(f) - S'_n(f)|$. Déterminer la plus petite valeur de n pour que $|S_n(f) - S'_n(f)|$ soit strictement inférieure à $0,1$. Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 0,05$ près.
5. Pour quelle valeur minimale de n obtient-on une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ près ?

Remarque : Il n'existe pas de primitive de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ donnée par des fonctions connues.

Exercice 4 Quelle est l'aire limitée par les droites d'équations $y = \frac{x}{4}$ et $y = 2x$ respectivement, et la courbe d'équation $y = \frac{2}{x^2}$?

Exercice 5 [Intégrations par parties] Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(t)$. Calculer, pour tout $x > 0$, $\int_1^x f(t)dt$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\cos(t)$. Calculer $\int_0^\pi t\cos(t)dt$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2e^t$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)dt$.
4. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_1^x f(t)dt$.

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^2 (t^4 + 3t^2 - t)dt$; (b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt$; (c) $\int_{-1}^1 (t+1)(t+2)(t+3)dt$;

(d) $\int_{-1}^5 |t-3|dt$; (e) $\int_1^3 (t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{3}{2}})dt$; (g) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin t + \cos t)^2dt$;

Exercice 7 [Primitives]

1. Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et préciser leurs domaines de définition.
2. Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et préciser leurs domaines de définition.
3. Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x}$ et préciser leurs domaines de définition.
4. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{8x^2 - 4x + 5}{x^4}$ en précisant son domaine de définition.
5. Calculer la primitive de la fonction $x \mapsto \tan x$ qui est nulle en $x = \pi$. Préciser son domaine de définition.
6. Calculer $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \tan x \; dx$.

Exercice 8 [Primitives] Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x \mapsto x\ln(x+1)$; (b) $x \mapsto \sqrt{x}\ln x$; (c) $x \mapsto \arctan x$;

(d) $x \mapsto \ln^2 x$; (e) $x \mapsto \cos^2 x$; (f) $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$.

Exercice 9 Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x \mapsto \frac{x-3}{2x^2+2x+1}$; (b) $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x-3}$; (c) $x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$;

(d) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; (e) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.