Feuille TD : Systèmes linéaires

Exercice 1 Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire : $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = b_3 \end{cases}$

1. Écrivez la matrice A du système.
2. À quelle condition sur b le système a-t-il des solutions ?
3. Soit ${}^t b = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice $(A|b)$, déterminez l'ensemble (infini) des solutions paramétré de variables libres $x_3,\ x_4$.
4. Donnez la solution qui vérifie $x_3 = -2,\ x_4 = 0$.

Exercice 2 Soit le système linéaire : $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -3 \\ 3x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 6y - az = 4 \end{cases}$

1. Écrivez la matrice B du système, puis la matrice augmentée.
2. Trouvez la valeur a pour laquelle le système a des solutions.
3. Déterminez l'ensemble des solutions.

Exercice 3 Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire : $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = b_3 \end{cases}$

1. Écrivez la matrice B du système.
2. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice $(B|b)$, déterminez en fonction de b l'ensemble des solutions.

Exercice 4 Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On fixe $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Montrez que le système $AX = Y$ a une unique solution.
2. Montrez que cette unique solution s'écrit $X = BY$, où B est une matrice carrée de taille 3.
3. Montrez que B est l'inverse de A.
4. Faites de même avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.