

Feuille TD : Matrices

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Calculer $\det(A)$ en faisant des opérations sur les lignes ou colonnes de A .

Exercice 2 En faisant des opérations sur les lignes de la matrice $(M|I_k)$ (avec $k = 3$ ou 4), déterminer si les matrices M suivantes sont inversibles, et si oui, trouvez leur inverse. Quand la matrice dépend de paramètres x, y , discuter l'inversibilité suivant la valeur des paramètres.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad M_{x,y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & x & 0 \\ 0 & -1 & -2 & y \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ soit inversible.

Exercice 4 Soient X une indéterminée et $A = \begin{pmatrix} 2-X & -3 & -6 \\ 0 & 5-X & 6 \\ -1 & -5 & -5-X \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X])$. Calculer le polynôme $P = \det(A) \in \mathbb{R}[X]$ et déterminer ses racines.

Exercice 5 Idem pour la matrice $B = \begin{pmatrix} -2-X & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4-X & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1-X & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -X \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}[X])$.

Exercice 6 On se place dans $M_4(\mathbb{R})$ et l'on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer si A est inversible et si oui, calculer son inverse.
2. Écrire la matrice $A + I_4$ et calculer son carré.
3. (*) En utilisant que $(A + I_4)(A + I_4) = A^2 + 2A + I_4$, déduire de la question précédente une égalité $A(A + aI_4) = bI_4$ pour des réels a, b qu'on déterminera. Comparer avec le résultat de la question 1.
4. (*) Mêmes questions pour n arbitraire, $A \in M_n(\mathbb{R})$ étant la matrice dont tous les coefficients valent 1 sauf ceux sur la diagonale qui sont nuls.