Feuille TD : Matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Pivot de Gauss)**.** A l'aide du pivot de Gauss détérminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Déterminant)**.** Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Système)**.** Résoudre le système linéaire suivant, où a, b et c sont des paramètres donnés :

$$\begin{cases} x + y - 6z & = a \\ x + 2y + z & = b \\ x + y + 2z & = c \end{cases}$$

Exercice 5. Pour ces matrices, discuter suivant les valeurs d'un réel m si elles sont inversibles, et donner le cas échéant leur inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & m \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (Systèmes d'équations)**.** Discuter, selon les valeurs du paramètre réel λ, l'existence et le nombre de solutions du système suivant. Donner l'ensemble des solutions du système.

$$\begin{cases} -(2+\lambda)x - 2y - 6z & = 0 \\ x - (1+\lambda)y + z & = 0 \\ x + 3y + (5 - \lambda - z) & = 0 \end{cases}$$

Exercice 7. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \ , \ P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP.
2. Détérminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ A^n = a^n P + b^n Q$.

Exercice 8. Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

Exercice 9. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit un vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Détérminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $Av = \lambda v$ admet une infinité de solutions. Dans chaque cas on donnera l'ensemble des solutions de l'équation.
2. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
3. Expliciter la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Montrer que pour tout$n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Expliciter alors A^n.

Exercice 10 (Quaternions)**.** On définit également les matrices suivantes à coefficients complexes :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier les formules $I^2 = J^2 = K^2 = -I_2$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$ et $KI = -IK = J$.
2. Montrer également que, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a $(aI_2+bI+cJ+dK)(aI_2-bI-cJ-dK) = (a^2+b^3+c^2+d^2)I_2$
3. En déduire que si la matrice $M = aI_2 + bI + cJ + dK$ n'est pas nulle, elle est inversible.

Exercice 11 (Rang et familles libres)**.** On considiѐre les deux matrices $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

On note $C_i(X)$ la i-ième colonne de X et $C_i(Y)$ la i-ième colonne de Y ($i = 1$, 2 où 3).

1. Montrer que la famille de trois vecteurs $(C_i(X))_{1 \leq i \leq 3}$ est libre.
2. Montrer que la famille de trois vecteurs $(C_i(Y))_{1 \leq i \leq 3}$ est liée.
3. Montrer que si on prend seulement 2 de ces vecteurs, on obtient une famille libre.
4. (*) En dèduire le rang des matrices X et Y et leur noyau.