

Feuille TD : Matrices

Exercice 1 (Produits de matrices). On considère :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quels sont les produits matriciels possibles? Les calculer.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA .
2. Calculer $(A+B)^2$.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.
4. Calculer $A^2 + AB + BA + B^2$ et conclure.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On pose $B = A - I$.

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n .

Exercice 4. Quelles sont les transposées des matrices suivantes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Dans $M_{3,4}(\mathbb{R})$ soient $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Écrire la matrice tA puis calculer $B{}^tA$.

Exercice 6. Soit $a, b \neq 0$. Trouver toutes les matrices 2×2 qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,r}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$. (Calculer le terme d'indice (i, j) de chaque matrice.)
2. Pour tout i, j , calculer $(A{}^tA)_{ij}$. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A{}^tA = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 8. On considère une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels) et la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer par récurrence les puissances n -ièmes D^n et T^n .
2. Calculer la matrice $X = D + T - I_2$.
3. Montrer que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & (X^n)_{12} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, avec $(X^n)_{12} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

Exercice 9. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = M - I_3.$$

1. Montrer que N peut s'écrire comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.
2. Calculer N^n , où n désigne un entier naturel.
3. En déduire l'expression de M^n .

Exercice 10 (Produit de matrices élémentaires). Calculer un produit de matrices élémentaires $E_{ij}E_{kl}$.

Exercice 11. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,r}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$. (Calculer le terme d'indice (i, j) de chaque matrice.)
2. Pour tout i, j , calculer $(A {}^tA)_{ij}$. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A {}^tA = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 12 (La trace). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , A et B dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer $\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que pour tous s et t dans \mathbb{K} , on a $\text{tr}(sA + tB) = s \text{tr}(A) + t \text{tr}(B)$.
3. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
4. Calculer $\text{tr}(A {}^tA)$.
5. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\text{tr}(A {}^tA) \geq 0$ et que cela vaut 0 si et seulement si $A = 0$.

Exercice 13 (Matrices de rotation). Soit θ un nombre réel. On considère la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. On considère un vecteur $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 . Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $v = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}$.
2. Calculer $R(\theta) \cdot v$.
3. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $v \rightarrow R(\theta)v$ est la rotation de centre 0 et d'angle θ .
4. On considère un autre nombre réel θ' . Calculer $R(\theta)R(\theta')$. Quelle est l'application de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ correspondante ?